Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Musterlösung zu Serie 8

1) ***Multiple Choice Aufgaben zur Laplace-Transformation***
Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben kreuzen Sie die richtige Aussage an.

(a) *Die Laplace-Transformierte von* $f(t) = (t-2)^2\Theta(t-1)$ *ist*

- ☐ $\frac{2e^{-2s}}{s^3}$
- ☐ $\frac{2}{s^3}$
- ☑ $\frac{2e^{-s}}{s^3} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s}$
- ☐ $\frac{2e^{-s}}{s^3} + \frac{2e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$

(b) *Die Laplace-Transformierte von* $f(t) = e^{2t}\sin(t)\Theta(t)$ *ist*

- ☐ $\frac{1}{4s^2+1}$
- ☑ $\frac{1}{(s-2)^2+1}$
- ☐ $\frac{2}{s^2+4}$
- ☐ $\frac{1}{(s+2)^2+1}$

(c) *Die Laplace-Transformierte von* $f(t) = \cos(t-\pi)\Theta(t-\pi)$ *ist*

- ☐ $\frac{1}{(s-\pi)^2+1}$
- ☐ $\frac{e^{\pi s}s}{s^2+1}$
- ☐ $\frac{s\pi}{s^2+\pi^2}$
- ☑ $\frac{e^{-\pi s}s}{s^2+1}$

Hinweis: *Hier bezeichnet* Θ *die Heaviside-Funktion die gegeben ist durch*

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & \textit{wenn} \quad t < 0 \\ 1, & \textit{wenn} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

2) ***Laplace-Transformation***
Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f_i\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$, *jeweils die Laplace-Transformierte unter Verwendung geeigneter Transformationssätze.*

(a) $f_1(t) = \cos(3t-2)\Theta(3t-2)$
(b) $f_2(t) = 20^{19t}$
(c) $f_3(t) = e^{-3t}\sin(\pi t)$
(d) $f_4(t) = t^2 + (t+2)\Theta(t-1)$

Lösung:

(a) Man beachte: $\Theta(3t-2) = \begin{cases} 1, & 3t \geq 2 \\ 0, & 3t < 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & t \geq \frac{2}{3} \\ 0, & t < \frac{2}{3} \end{cases} = \Theta(t - \frac{2}{3})$. Wir wenden also den Verschiebungssatz (Proposition 3.10, 1.) an:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1](s) &= \mathcal{L}[t \mapsto \cos(3(t-\tfrac{2}{3}))\Theta(t-\tfrac{2}{3})](s) \\ &= e^{-\frac{2}{3}s}\mathcal{L}[t \mapsto \cos(3t)] = \frac{se^{-\frac{2}{3}s}}{s^2+9}. \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_2](s) &= \mathcal{L}[t \mapsto e^{19\ln(20)t}](s)\\ &= \frac{1}{s - 19\ln(20)}.\end{aligned}$$

(c) Wir wenden den Dämpfungssatz/Kontraktionssatz (Proposition 3.12) an:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_3](s) &= \mathcal{L}[t \mapsto e^{-3t}\sin(\pi t)](s)\\ &= \mathcal{L}[t \mapsto \sin(\pi t)](s+3) = \frac{\pi}{(s+3)^2 + \pi^2}.\end{aligned}$$

(d) Zunächst sehen wir: $(t+2)\Theta(t-1) = (t-1)\Theta(t-1) + 3\Theta(t-1)$. Dann wenden wir die Linearität (Proposition 3.6) und den Verschiebungssatz (Proposition 3.10, 1.) an:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_4](s) &= \mathcal{L}[t \mapsto t^2](s) + \mathcal{L}[t \mapsto (t-1)\Theta(t-1)](s) + \mathcal{L}[t \mapsto 3 \cdot \Theta(t-1)]\\ &= \frac{2}{s^3} + e^{-s}\mathcal{L}[t \mapsto t](s) + e^{-s}\mathcal{L}[t \mapsto 3](s)\\ &= \frac{2}{s^3} + \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{3e^{-s}}{s}.\end{aligned}$$

3) **Faltung I**
Die *Faltung* von zwei (absolut) integrierbaren Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist die Funktion $f * g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass die Faltung die folgenden elementaren Eigenschaften erfüllt:

(a) Kommutativität: $f * g = g * f$,
(b) Assoziativität: $(f * g) * h = f * (g * h)$,
(c) Lineartität: $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$,
(d) Differentiation: $(f * g)' = f' * g$,

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen sind.

Bemerkung: In der letzten Teilaufgabe nehmen Sie zusätzlich an, dass $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist mit $f'(0) = 0$.
Lösung:

(a) Mit der Substitution $s = t - \tau$, $ds = -d\tau$ erhalten wir

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = (g * f)(t)$$

für alle $t \geq 0$.

(b) Wir bermerken, wenn $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $t < 0$ verschwinden, dann gilt

$$\int_0^\infty f(s)g(t-s)\,ds = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds = (f * g)(t)$$

und deshalb reicht es zu zeigen, dass gilt

$$\underbrace{\int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(s-\tau)h(t-s)\,d\tau ds}_{=[(f*g)*h](t)} = \underbrace{\int_0^\infty \int_0^\infty f(s)g(\tau)h(t-s-\tau)\,d\tau ds}_{=[f*(g*h)](t)}$$

für alle integriebaren $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass $f(t) = g(t) = h(t) = 0$ für $t < 0$. Jedoch folgt diese Identität direkt aus dem Satz von Fubini und der Substitution $u = s - \tau$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(s-\tau)h(t-s)\,d\tau ds &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(s-\tau)h(t-s)\,dsd\tau \\
&= \int_0^\infty f(\tau)\left(\int_0^\infty g(u)h(t-\tau-u)\,du\right)d\tau \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(\tau)g(u)h(t-\tau-u)\,dud\tau.
\end{aligned}$$

(c) Mit der Linearität des Integrals erhalten wir

$$\begin{aligned}
(f*(\alpha g+\beta h))(t) &= \int_0^t f(\tau)(\alpha g(t-\tau)+\beta h(t-\tau))\,d\tau \\
&= \alpha\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau + \beta\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \\
&= \alpha(f*g)(t) + \beta(f*h)(t)
\end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$.

(d) Wie üblich setzen wir f, g durch Null auf $\mathbb{R}$ fort und da $f'(0) = 0$ ist die Fortsetzung stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Mit (a), (b) erhalten wir

$$\frac{(f*g)(t+h)-(f*g)(t)}{h} = \int_0^\infty \frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}g(s)\,ds$$

für alle $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Da f stetig differenzierbar ist, erhalten wir aus dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}g(s) &= f'(t-s)g(s), \\
\left|\frac{f(t+h-s)-f(t-s)}{h}g(s)\right| &\leq \sup_{\tau\in[0,T]}|f'(\tau)||g(s)|
\end{aligned}$$

für alle $T > 0$. Da g absolut integrierbar ist folgt dem Satz der majorisierten Konvergenz

$$(f*g)'(t) = \int_0^\infty f'(t-s)g(s)\,ds = \int_0^t f'(t-s)g(s)\,ds$$

für $h \to 0$.

4) ***Faltung II***
Sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = \sin(t)$.

(a) Berechnen Sie die Faltung $f * f$.

(b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $f * f$ ohne Verwendung des Faltungssatzes.

Lösung:

(a) Mit $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ und Aufgabe 3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sin(t)*\sin(t) &= \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)*\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)*e^{it} - \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)*e^{-it}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{it}*e^{-it} - e^{-it}*e^{it}\right) - \frac{1}{2i}\left(e^{it}*e^{-it} - e^{-it}*e^{-it}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{it}*e^{it} - 2e^{it}*e^{-it} + e^{-it}*e^{-it}\right).
\end{aligned}$$

Aus dem Fundamentalsatz der Analysis folgt

$$\begin{aligned}
(e^{it} * e^{it})(t) &= \int_0^t e^{i(t-t')} e^{it'}\, dt' = te^{it} \\
(e^{-it} * e^{-it})(t) &= \int_0^t e^{-i(t-t')} e^{-it'}\, dt' = te^{-it} \\
(e^{it} * e^{-it})(t) &= \int_0^t e^{i(t-t')} e^{-it'}\, dt' = e^{it} \int_0^t e^{-2it'}\, dt' = -\left.\frac{e^{it}}{2i} e^{-2it'}\right|_0^t \\
&= -\frac{e^{it}}{2i}(e^{-2it} - 1) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin(t).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sin(t) * \sin(t) &= -\frac{1}{4}\left(te^{it} - 2\sin(t) + te^{-it}\right) = \frac{\sin(t)}{2} - \frac{t}{2}\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\
&= \frac{\sin(t)}{2} - \frac{t}{2}\cos(t) = \frac{\sin(t) - t\cos(t)}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Mit Teilaufgabe (a), der Linearität von $\mathcal{L}$ und der Ableitungsregel im Bildbereich aus der Vorlesung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f * f](s) &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}[\sin(t)](s) - \mathcal{L}[t\cos(t)](s)) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[\sin(t)](s) + \frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos(t)](s)) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{(s^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Mit dem Faltungssatz wäre die Laplace-Transformierte sehr einfach zu berechnen und zwar

$$\mathcal{L}[f * f] = (\mathcal{L}f)^2 = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)^2.$$