Musterlösung zu Serie 9

1) ***Multiple Choice Aufgaben***
Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben kreuzen Sie die richtige Aussage an.

(a) *Die Laplace-Transformierte von $f(t) = t\sin(2t)$ ist*

- ☑ $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$
- ☐ $\frac{s}{(s^2+4)^2}$
- ☐ $\frac{4s}{s^2+4}$
- ☐ $\frac{4s}{(s^2+4)^3}$

(b) *Die Faltung von $f(t) = e^{-at}$ und $g(t) = t$, wobei $a > 0$, ist*

- ☐ $\frac{e^{at}}{a^2}[ate^{at} + e^{at} + 1]$
- ☐ $\frac{e^{-at}}{a^2}[ate^{-at} - e^{at} + 1]$
- ☑ $\frac{e^{-at}}{a^2}[ate^{at} - e^{at} + 1]$
- ☐ $\frac{e^{-at}}{a^2}[ate^{at} - e^{at} - 1]$

(c) *Die inverse Laplace-Transformation von $F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$ ist*

- ☐ $e^{-t} - e^{-2t}$
- ☐ $e^{e^{-2t}+e^{-3t}}$
- ☑ $e^{-2t} - e^{-3t}$
- ☐ *existiert nicht*

2) ***Faltungssatz***
Berechnen Sie mithilfe des Faltungssatzes $\mathcal{L}^{-1}[u]$ und $\mathcal{L}^{-1}[v]$, wobei

$$u(s) = \frac{1}{s^3(s-4)}, \qquad v(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

Lösung: E s gilt: $u(s) = \frac{1}{s^3} \cdot \frac{1}{s-4} = \mathcal{L}[g_1](s) \cdot \mathcal{L}[g_2](s) = \mathcal{L}[g_1 * g_2](s)$, wobei $g_1(t) = \frac{1}{2}t^2$ und $g_2(t) = e^{4t}$. Also ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[u](t) = g_1 * g_2(t) &= \int_0^t \frac{u^2}{2} e^{4(t-u)} du \\
&= \frac{1}{2}e^{4t} \int_0^t u^2 e^{-4u} du \\
&= \frac{1}{2}e^{4t} \left[-\frac{1}{4}u^2 e^{-4u}\right]_0^t + \frac{1}{4}e^{4t} \int_0^t ue^{-4u} dy \\
&= -\frac{1}{8}e^{4t}t^2e^{-4t} - \frac{1}{4}e^{4t}\left[\frac{1}{4}ue^{-4u}\right]_0^t + \frac{1}{16}e^{4t}\int_0^t e^{-4u}du \\
&= -\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t - \frac{1}{64}e^{4t}\left[e^{-4u}\right]_0^t \\
&= -\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t - \frac{1}{64} + \frac{1}{64}e^{4t}.
\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin $v(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}[h_1](s) \cdot \mathcal{L}[h_2](s) = \mathcal{L}[h_1 * h_2](s)$, wobei $h_1(t) = h_2(t) = \sin(t)$. Also ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[v](t) = h_1 * h_2(t) &= \int_0^t \sin(u)\sin(t-u)du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \cos(2u-t)du - \frac{1}{2}\int_0^t \cos(t)du \\
&= \frac{1}{4}[\sin(2u-t)]_0^t - \frac{1}{2}t\cos(t) \\
&= \frac{1}{4}(\sin(t) - \sin(-t)) - \frac{1}{2}t\cos(t) \\
&= \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{2}t\cos(t).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$.

3) ***Inverse Laplace-Transformation***
Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformation folgender Funktionen

(a) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$

(b) $G(s) = \frac{3s^2-3s+1}{s^3-2s^2+s}$

Lösung:

(a) Es gilt $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = t$ und $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+1}) = \sin(t)$. Mit dem Faltungssatz folgt daher

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right) = t*\sin(t) = \int_0^t u\sin(t-u)du = u\cos(t-u)|_0^t - \int_0^t \cos(t-u)du = t - \sin(t).$$

(b) Der Nenner kann faktorisiert werden, es gilt $s^3 - 2s^2 + s = s(s-1)^2$. Wir machen den Ansatz

$$\frac{3s^2-3s+1}{s^3-2s^2+s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

für die Partialbruchzerlegung und erhalten die Gleichung

$$3s^2 - 3s + 1 = A(s^2-2s+1) + B(s^2-s) + Cs = (A+B)s^2 - (2A+B-C)s + A.$$

Es folgt der Reihe nach $A = 1$, $B = 2$ und $C = 1$. Wegen Linearität der Laplace-Transformation gilt nun

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s^2-3s+1}{s^3-2s^2+s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) = 1 + 2e^t + te^t.$$

4) **Laplace-Transformation periodischer Funktionen**

(a) Zeigen Sie mithilfe des Verschiebungssatzes, dass für eine periodische, stückweise stetige, auf $[0,\infty)$ definierte Funktion f mit Periode $T > 0$ gilt:

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt.$$

Hinweis: Teilen Sie $\mathbb{R}$ in Intervalle der Länge T auf und benutzen Sie, dass für q mit $|q| < 1$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

(b) Benutzen Sie (a), um die Laplace-Transformierte folgender Funktionen zu berechnen:

(A) $f_1(t) = \sin(2t)$

(B) $f_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,2] \\ 2, & t \in]2,3] \\ 0, & t \in]3,4], \end{cases}$, 4-periodisch fortgesetzt nach $[0,\infty)$.

Lösung:

(a) Zuerst bemerkt man, dass periodische Funktionen $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ erfüllt mit $C := \max_{t\in[0,T]} |f(t)|$ und $\alpha \geq 0$, also $\alpha_f = 0$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T e^{-s(\tilde{t}+nT)} \underbrace{f(\tilde{t}+nT)}_{=f(\tilde{t})} d\tilde{t} \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T e^{-snT}e^{-s\tilde{t}} f(\tilde{t})d\tilde{t} \\
&= \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-snT}\right)\left(\int_0^T e^{-s\tilde{t}} f(\tilde{t})d\tilde{t}\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tilde{t}} f(\tilde{t})d\tilde{t}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir substituiert $\tilde{t} = t - nT$ (für jedes einzelne $n \geq 0$).

(b) Es gilt:

(A) f_1 hat Periode π. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f_1](s) &= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^\pi e^{-st}\sin(2t)dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{1}{2i} \int_0^\pi (e^{(2i-s)t} - e^{-(2i+s)t})dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{2i-s}e^{(2i-s)t} + \frac{1}{2i+s}e^{-(2i+s)t}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{2i-s}e^{-s\pi} + \frac{1}{2i+s}e^{-s\pi} - \frac{1}{2i-s} - \frac{1}{2i+s}\right) \\
&= \frac{2}{4+s^2}.
\end{aligned}$$

(B) f_2 hat Periode 4. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f_2](s) &= \frac{1}{1-e^{-4s}} \left(\int_0^2 e^{-st}dt + 2\int_2^3 e^{-st}dt\right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-4s}} \left(\frac{1-e^{-2s}}{s} + \frac{2e^{-2s}-2e^{-3s}}{s}\right) \\
&= \frac{1+e^{-2s}-2e^{-3s}}{s(1-e^{-4s})}.
\end{aligned}$$