D-HEST | Mathematik III | HS 2021

Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Serie 0

Abgabe: Dienstag, den 28. September 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Gewöhnliche Differentialgleichungen, trigonometrische und periodische Funktionen.

---

1. **Bakterienwachstum**
Das Wachstum einer Bakterienpopulation sei beschrieben durch das Anfangswertproblem

$$\frac{d}{dt}P(t) = \lambda P(t)(G - P(t)), \qquad P(0) = P_0.$$

mit reellen Parametern $\lambda, G, P_0 > 0$.

(i) Welche anschauliche Bedeutung haben die Parameter λ und G?

(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem zunächst für allgemeine $\lambda, G > 0$. Für $\lambda = 10^{-7}$ und $G = 3 \cdot 10^6$, skizzieren Sie die Lösungen für die verschiedenen Anfangsbedingungen $P_0^{(1)} = 0.5 \cdot 10^6$ und $P_0^{(2)} = 4 \cdot 10^6$ in ein Koordinatensystem.

2. **Chemische Reaktionen 1. Ordnung**
In einer wässriger Lösung von D-Glucose bildet sich ein Gleichgewicht der Anomere α-D-Glucose und β-D-Glucose *('Mutarotation')*, entsprechend der Gleichung:

$$\alpha\text{-D-Glucose} \rightleftharpoons \beta\text{-D-Glucose}.$$

Die Konzentrationen der einzelnen Anomere bezeichnen wir mit c_α und c_β. Wir gehen davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ nur α-D-Glucose in der Lösung vorliegt, $c_\alpha(0) = c_{0,\alpha} > 0$ und $c_\beta(0) = 0$. Für die Reaktion gilt:

$$-\frac{d}{dt}c_\alpha(t) = \lambda_+ c_\alpha(t) - \lambda_- c_\beta(t),$$
$$c_{0,\alpha} = c_\alpha(t) + c_\beta(t).$$

(i) Ermitteln Sie $c_\alpha(t)$ und $c_\beta(t)$ unter den gegebenen Anfangsbedingungen.

(ii) Finden Sie die Gleichgewichtskonzentrationen $c_{\alpha,GG} = \lim_{t\to\infty} c_\alpha(t)$ und $c_{\beta,GG} = \lim_{t\to\infty} c_\beta(t)$, sowie die Halbwertszeit T_H mit $c_\beta(T_H) = \frac{1}{2}c_{\beta,GG}$.

(iii) Bei Raumtemperatur liegen im Gleichgewicht etwa 63.5% β-D-Glucose und 36.5% α-D-Glucose vor. Weiterhin kann man durch polarimetrische Messungen bestimmen, dass $T_H \simeq 150$ min ist. Bestimmen Sie daraus die Werte von λ_- und λ_+.

3. **Trigonometrische Funktionen**

(a) Weisen Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten nach:

(i) $\cos^3(x) = \frac{1}{4}\left(3\cos(x) + \cos(3x)\right)$

(ii) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(iii) $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$

Hinweis: Verwenden Sie: $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$ und $\sin(\alpha) = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$.

(b) Berechnen Sie folgende Integrale:

   (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)dx$

   (ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx$, wobei $n, m \in \mathbb{N}$.

4. **Periodische Funktionen**

   Betrachten Sie die Funktion f, gegeben auf dem Intervall $[0, \pi]$, mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie eine *gerade*, 2π-periodische Funktion f_g auf $\mathbb{R}$, die mit f auf $[0, \pi]$ übereinstimmt. Man nennt f_g die *gerade, 2π-periodische Fortsetzung* von f.

   (b) Skizzieren Sie f_g im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

   (c) Sei nun h eine beliebige, P-periodische Funktion, wobei $P > 0$. Beweisen Sie, dass für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_c^{c+P} h(x)dx = \int_{-P/2}^{P/2} h(x)dx.$$

   Mit anderen Worten: *Das Integral einer periodischen Funktion über eine Periode hängt nicht vom Startwert ab.*

   (d) Benutzen Sie Teil (c), um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_{4\pi}^{10\pi} f_g^2(x)dx.$$