

## Serie 0

**Abgabe:** Dienstag, den 28. September 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

**Themen:** Gewöhnliche Differentialgleichungen, trigonometrische und periodische Funktionen.

---

### 1. Bakterienwachstum

Das Wachstum einer Bakterienpopulation sei beschrieben durch das Anfangswertproblem

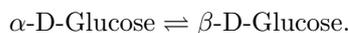
$$\frac{d}{dt}P(t) = \lambda P(t)(G - P(t)), \quad P(0) = P_0.$$

mit reellen Parametern  $\lambda, G, P_0 > 0$ .

- (i) Welche anschauliche Bedeutung haben die Parameter  $\lambda$  und  $G$ ?
- (ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem zunächst für allgemeine  $\lambda, G > 0$ . Für  $\lambda = 10^{-7}$  und  $G = 3 \cdot 10^6$ , skizzieren Sie die Lösungen für die verschiedenen Anfangsbedingungen  $P_0^{(1)} = 0.5 \cdot 10^6$  und  $P_0^{(2)} = 4 \cdot 10^6$  in ein Koordinatensystem.

### 2. Chemische Reaktionen 1. Ordnung

In einer wässriger Lösung von D-Glucose bildet sich ein Gleichgewicht der Anomere  $\alpha$ -D-Glucose und  $\beta$ -D-Glucose (*Mutarotation*), entsprechend der Gleichung:



Die Konzentrationen der einzelnen Anomere bezeichnen wir mit  $c_\alpha$  und  $c_\beta$ . Wir gehen davon aus, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  nur  $\alpha$ -D-Glucose in der Lösung vorliegt,  $c_\alpha(0) = c_{0,\alpha} > 0$  und  $c_\beta(0) = 0$ . Für die Reaktion gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}c_\alpha(t) &= \lambda_+ c_\alpha(t) - \lambda_- c_\beta(t), \\ c_{0,\alpha} &= c_\alpha(t) + c_\beta(t). \end{aligned}$$

- (i) Ermitteln Sie  $c_\alpha(t)$  und  $c_\beta(t)$  unter den gegebenen Anfangsbedingungen.
- (ii) Finden Sie die Gleichgewichtskonzentrationen  $c_{\alpha,GG} = \lim_{t \rightarrow \infty} c_\alpha(t)$  und  $c_{\beta,GG} = \lim_{t \rightarrow \infty} c_\beta(t)$ , sowie die Halbwertszeit  $T_H$  mit  $c_\beta(T_H) = \frac{1}{2}c_{\beta,GG}$ .
- (iii) Bei Raumtemperatur liegen im Gleichgewicht etwa 63.5%  $\beta$ -D-Glucose und 36.5%  $\alpha$ -D-Glucose vor. Weiterhin kann man durch polarimetrische Messungen bestimmen, dass  $T_H \simeq 150$  min ist. Bestimmen Sie daraus die Werte von  $\lambda_-$  und  $\lambda_+$ .

### 3. Trigonometrische Funktionen

- (a) Weisen Sie die folgenden trigonometrischen Identitäten nach:

(i)  $\cos^3(x) = \frac{1}{4}(3 \cos(x) + \cos(3x))$

(ii)  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(iii)  $\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

**Hinweis:** Verwenden Sie:  $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$  und  $\sin(\alpha) = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$ .

(b) Berechnen Sie folgende Integrale:

(i)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x) dx$

(ii)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx$ , wobei  $n, m \in \mathbb{N}$ .

#### 4. Periodische Funktionen

Betrachten Sie die Funktion  $f$ , gegeben auf dem Intervall  $[0, \pi]$ , mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie eine *gerade*,  $2\pi$ -periodische Funktion  $f_g$  auf  $\mathbb{R}$ , die mit  $f$  auf  $[0, \pi]$  übereinstimmt. Man nennt  $f_g$  die *gerade,  $2\pi$ -periodische Fortsetzung* von  $f$ .

(b) Skizzieren Sie  $f_g$  im Intervall  $[-3\pi, 3\pi]$ .

(c) Sei nun  $h$  eine beliebige,  $P$ -periodische Funktion, wobei  $P > 0$ . Beweisen Sie, dass für alle  $c \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int_c^{c+P} h(x) dx = \int_{-P/2}^{P/2} h(x) dx.$$

Mit anderen Worten: *Das Integral einer periodischen Funktion über eine Periode hängt nicht vom Startwert ab.*

(d) Benutzen Sie Teil (c), um das folgende Integral zu berechnen:

$$\int_{4\pi}^{10\pi} f_g^2(x) dx.$$