D-HEST Mathematik III HS 2021
Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Serie 1

Abgabe: Dienstag, den 5. Oktober 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Fourierreihen, Reihenwerte, Parseval-Identität und Beispiel eines Funktionenraumes mit Skalarprodukt.

Bemerkung: Aufgaben mit $(*)$ sind fakultativ.

---

1. **Reelle Fourierreihen**
   Bestimmen Sie die trigonometrischen Koeffizienten a_n, b_n der Fourier-Reihe mit Periode T zu den folgenden Funktionen f, g, h:

   (i) $f(x) = \cos(x/2), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad T = 2\pi$

   (ii) $g(x) = 1 - e^{-x/2}, \quad x \in [0, 2[, \quad T = 2$

   (iii) $h(x) = 1 - e^{-2\pi x}, \quad x \in [0, 1[, \quad T = 1$

2. **Konvergenz von reellen Fourierreihen**
   Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Fourierreihen der folgenden Funktionen konvergieren und falls ja, ob sie die jeweilige Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ darstellen. Was geschieht an den Unstetigkeitsstellen?

   (i) $f(x) = x^4 - 2\pi^2 x^2$ auf $[-\pi, \pi[$, periodisch fortgesetzt nach $\mathbb{R}$

   (ii) $g(x) = 2\left(\frac{x}{\pi} - \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)$ auf $\mathbb{R}$, wobei $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.

   Hinweis: Verwenden Sie Satz 1.5 und Korollar 1.6 aus dem Skript.

3. **Reihenwerte und Fourierreihen**
   Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = x^3 - \pi^2 x$, $x \in [-\pi, \pi]$, 2π-periodisch fortgesetzt nach $\mathbb{R}$.

   (i) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

   (ii) Begründen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ durch seine Fourierreihe dargestellt wird, das bedeutet:
   $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

   (iii) Berechnen Sie mithilfe von (i) und (ii) den Wert der Reihe
   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

4. **Parseval-Identität**
   Für eine auf $[-\pi, \pi]$ definierte, stückweise stetige Funktion f definieren wir die L^2-*Norm*:

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx}.$$

   Für die reellen Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Fortsetzung von f, $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, gilt die sogenannte *Parseval-Identität*:

$$\frac{1}{\pi}\|f\|_{L^2}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

   (i) Berechnen Sie die L^2-Norm der Funktion f mit $f(x) = x^2$ auf $[-\pi, \pi]$.

   (ii) Benutzen Sie die Parseval-Identität, um nachzuweisen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5. $(*)$ **Beispiel eines Funktionenraumes mit Skalarprodukt**
   Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $C^1([-1,1])$ der auf $[-1,1]$ stetig differenzierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

   (i) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{P}_{\leq 2}$ der Polynome vom Grad ≤ 2 einen endlichdimensionalen Untervektorraum von $C^1([-1,1])$ mit Basis $\{f_1, f_2, f_3\}$ bildet, wobei $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ und $f_3(x) = x^2$.

   (ii) Begründen Sie, dass $\{f_1, f_2, f_3\}$ *keine* Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_{\leq 2}$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist, und finden Sie $h \in \mathcal{P}_{\leq 2}$, sodass $\{f_1, f_2, h\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_{\leq 2}$ bildet.
   Hinweis: Schreiben Sie $H(x) = Ax^2 + Bx + C$ und bestimmen Sie $A, B, C \in \mathbb{R}$, sodass $\langle f_1, H\rangle = \langle f_2, H\rangle = 0$ und normieren Sie H entsprechend.

   (iii) Zeigen Sie, dass $\langle g, u\rangle = 0$ gilt, falls g eine gerade und u eine ungerade Funktion ist.