Serie 10

Abgabe: Dienstag, den 7. Dezember 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen und Integralgleichungen mittels Laplace-Transformation

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

---

1) ***Multiple Choice Aufgaben***
Kreuzen Sie die richtige Aussagen an.

(a) *Die Laplace-Transformierte von $f(t) = \sqrt{t}$ ist $F(s) = \frac{\pi^{1/2}}{2s^{3/2}}$. Was ist die Laplace-Transformierte von $g(t) = t^{5/2}$?*

- ☐ $G(s) = \frac{\pi^{5/2}}{2s^{7/2}}$
- ☐ $G(s) = \frac{15}{4}\frac{\pi^{1/2}}{s^{5/2}}$
- ☐ $G(s) = \frac{2\pi^{1/2}}{s^{3+1/2}}$
- ☐ $G(s) = \frac{15}{8}\frac{\pi^{1/2}}{s^{7/2}}$

(b) *Die inverse Laplace-Transformierte von $F(s) = \frac{1}{s^2+4s+20}$ ist*

- ☐ $(e^t - e^{-5t})/6$
- ☐ $e^{-2t}\sin(4t)/4$
- ☐ $(e^t + e^{5t})/6$
- ☐ $e^{-2t}\cos(4t)/4$

(c) *Betrachten Sie das Anfangswertproblem*

$$\dot{x}(t) + x(t) = t, \quad x(0) = 1$$

und entscheiden Sie welche Aussagen zutreffen

- ☐ $x(t) = -1 + t + 2e^{-t}$
- ☐ $X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1}$
- ☐ $x(t) = 1 + t + e^{-t}$
- ☐ $X(s) = \frac{s^2+1}{s^2(1+s)}$

Hier bezeichnet $X(s)$ die Laplace-Transformierte von $x(t)$.

2) ***Differentialgleichung zweiter Ordnung***
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) - x(t) = e^t, \\ x(0) = \dot{x}(0) = 1, \end{cases}$$

indem Sie das Laplace-transformierte Problem betrachten.

3) **Differentialgleichung vierter Ordnung**
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) - x(t) = 4e^t, \\ x(0) = 9, \dot{x}(0) = 5, \ddot{x}(0) = 3, x^{(3)}(0) = -3 \end{cases}$$

indem Sie das Laplacetransformierte Problem betrachten, wobei wir mit $x^{(3)}, x^{(4)}$ die 3te und 4te Ableitung bezeichnen.

4) ***Integralgleichungen***
Bestimmen Sie mithilfe der Laplace-Transformation die Lösung $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *folgender Integralgleichungen:*

(a) $x(t) = \cos(t) + \int_0^t x(u)\,du$

(b) $6x(t) = 2t^3 + \int_0^t x(u)(t-u)^3\,du$

(c) $t\sin(t) = \int_0^t x(u)\sin(t-u)\,du$