D-HEST
Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Mathematik III

HS 2021

Serie 11

Abgabe: Dienstag, den 14. Dezember 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Partielle Ableitungen, elementare Differentialoperatoren, Klassifikation von PDEs, Koordinatentransformation und Wärmeleitungsgleichung

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

Bemerkung: Aufgaben mit einem $(*)$ gekennzeichnet, sind rein fakultativ und gehören nicht zum Prüfungsstoff.

---

1) ***Kurzfragen und Multiple Choice Aufgaben***
Bei Kurzfragen genügt es die Antwort hinzuschreiben.

(a) *Welche Ordnung haben die folgenden partiellen Differentialgleichungen? Welche sind linear und welche sind homogen?*

(i) $u_x^2 + e^y u_{yy} = \sin(x)$,
(ii) $u_{xx} + e^{-y^2} u_y = 0$,
(iii) $u_{xxx} + \exp(u_y) + 4u_{xy} = 1/x$,
(iv) $u_{xx} - y^2 u_{yy} + 2yu_y + 2u = \cos(x)^2$,
(v) $9u_{xx} + 12u_{xy} + 2u_{yy} = 0$
(vi) $5u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 7u_x + 3u_y = \exp(-x^2)$

(b) *Sei $u(x,t)$ eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} - u_{xx} = 0$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Koordinatentransformation $\xi = \xi(x,t), \eta = \eta(x,t)$, welche PDG die Funktion $v(\xi, \eta) = u(x,t)$ löst.*

(i) $\xi = 4x, \eta = 5t$:
☐ $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = 0$
☐ $4v_{\xi\xi} - 5v_{\eta\eta} = 0$
☐ $16v_{\xi\xi} - 40v_{\xi\eta} + 25v_{\eta\eta} = 0$
☐ $16v_{\xi\xi} - 25v_{\eta\eta} = 0$

(ii) $\xi = x + 3t, \eta = t$:
☐ $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = 0$
☐ $8v_{\xi\xi} + 6v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta} = 0$
☐ $9v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = 0 = 0$
☐ $v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} - 9v_{\eta\eta} = 0$

(iii) $\xi = 2x, \eta = xt$:
☐ $\xi^2 v_{\xi\xi} - \eta^2 v_{\eta\eta} = 0$
☐ $-\frac{8}{3}\xi v_{\xi\xi} - 4\frac{\xi}{\eta} v_{\xi\eta} - v_{\eta\eta} = 0$
☐ $4v_{\xi\xi} + 4\eta^2 v_{\xi\eta} + ((2\xi)^{-2} - \eta^2)v_{\eta\eta} = 0$
☐ $4(v_{\xi\xi} + 2\frac{\eta}{\xi} v_{\xi\eta}) + \left(\left(\frac{2\eta}{\xi}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{2}\right)^2\right) v_{\eta\eta} = 0$

2) ***Partielle Ableitungen und elementare Differentialoperatoren***
Bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

(a) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x^2)y\right)$

(b) $\frac{\partial}{\partial z}\frac{xyz}{\log(x^2+yz^2)}$

(c) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^3y^2\sin(z)+z^{2017}+\cos(xyz)\right)$

(d) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(y^x+x^y\right)$, $y>2$

Weiterhin definieren wir für eine skalare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sowie eine vektorwertige Funktion* $\boldsymbol{F} = (F_1, ..., F_n)^\top : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *die Differentialoperatoren*

$$\begin{aligned}
grad\ \varphi(x_1,...,x_n) = \nabla\varphi(x_1,...,x_n) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1,...,x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\varphi(x_1,...,x_n) \end{pmatrix} \\
div\ \boldsymbol{F}(x_1,...,x_n) = \nabla\cdot\boldsymbol{F}(x_1,...,x_n) &= \frac{\partial}{\partial x_1}F_1(x_1,...,x_n)+...+\frac{\partial}{\partial x_n}F_n(x_1,...,x_n) \\
\Delta\varphi(x_1,...,x_n) = div\,grad\,\varphi(x_1,...,x_n) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)\varphi(x_1,...,x_n)
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie damit die folgenden Ausdrücke:

(A) $div\begin{pmatrix} xyz \\ \sin(xy) \\ z^3+2x \end{pmatrix}$

(B) $grad\ (xy^2+e^{xy^2}-z)$

(C) $div\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

(D) $\Delta(x^2+y^2+\sin(z))$

3) ***Wärmeleitungsgleichung I***
Gegeben sei das Anfangs- und Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 4u_{xx}(x,t), & \textit{für alle } (x,t)\in(0,10)\times\mathbb{R}_+, \\ u(0,t)=u(10,t)=0, & \textit{für alle } t\geq 0, \\ u(x,0)=f(x), & \textit{für alle } x\in(0,10). \end{cases}$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung, wenn f *von der folgenden Form ist:*

(a) $f(x)=\sin(5\pi x)-3\sin(\pi x)$,

(b) $f(x)=2\sin(\frac{7\pi x}{2})$,

(c) $f(x)=\sin(3\pi x)+2\cos(\frac{(6x+5)\pi}{10})$,

(d) $f(x)=6\cos^2(\pi x-\frac{\pi}{4})-3$.

4) ($*$) **Wärmeleitungsgleichung II**
Wir definieren den Wärmeleitungskern durch

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t}\Big) \quad \text{für} \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(a) K_t ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t K_t - \Delta K_t = 0$$

für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$

(b) $\lim_{t\to 0} K_t(x) = 0$ für $x \neq 0$.

(c) $\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x)\, dx = 1$ für $t > 0$. (**Tipp:** Sie dürfen das Resultat $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$ verwenden.)

Betrachten Sie nun die Funktion u gegeben durch

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) f(y)\, dy,$$

wobei f eine stetige, beschränkte Funktion ist und $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Zeigen Sie:

(A) u ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - \Delta u = 0$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

(B) u erfüllt

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$$

für $x \in \mathbb{R}^n$.

(C) Es gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |u(x,t)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

für $t > 0$.