D-HEST | Mathematik III | HS 2021

Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Serie 12

Abgabe: Dienstag, den 21. Dezember 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Laplace-Gleichung, Fourier-Transformation

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

---

1) ***Kurzfragen und Multiple Choice Aufgaben***

   (i) Sei u die eindeutige Lösung der Laplace-Gleichung auf der Einheitskreisscheibe mit Randwerten $u(x,y) = xy + 3$. Beantworten Sie folgende Fragen ohne ein Integral zu berechnen.

   (a) Wie lautet $u(x,y)$ in kartesischen Koordinaten?

   (b) Welchen Wert hat u im Punkt $(0,0)$?

   (c) Was ist das Maximum von u und in welchen Punkten wird es angenommen?

   (ii) Existiert eine Funktion u so dass

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } B_r(0), \\ u(r,\phi) = (\sin(\phi))^9, & \phi \in [0, 2\pi), \\ u + 1/2 \geq 0, & \text{in } \overline{B}_r(0), \end{cases}$$

   wobei $B_r(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < r^2\}$ und $r > 0$.

2) ***Laplace-Gleichung auf Rechteck***
   Lösen Sie folgendes Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & \textit{für } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u(x,0) = \sin(\pi x) - \sin(2\pi x), & \textit{für } 0 \leq x \leq 1, \\ u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 0, & \textit{für } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

3) ***Laplace-Gleichung auf Kreisscheibe***
   Betrachten Sie das folgende Randwertproblem für die Laplace-Gleichung

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in B_1(0) \\ u(x,y) = x^2 + 2xy + y^2, & (x,y) \in \partial B_1(0), \end{cases}$$

   wobei $B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

   (a) Finden Sie den Wert von u *im Punkt* $(0,0)$.

   (b) Finden Sie das Maximum von u *auf* $\overline{B}_1(0)$.

4) ***Fourier-Transformation***
Berechnen Sie die Fourier-Transformierte folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \begin{cases} 3(1 - x/2), & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{für alle } x > 0, \\ 0, & \text{für alle } x \leq 0, \end{cases}$ für eine Konstante $a > 0$.

(c) $f(x) = e^{-a(x-b)^2}$ mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$,

(d) $f(x) = 8xe^{-2(x-1)^2}$.