D-HEST | Mathematik III | HS 2021

Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Serie 2

Abgabe: Dienstag, den 12. Oktober 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Fourierreihen, Fourierreihen in höheren Dimensionen

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

---

1. ***Komplexe Fourierreihe und Euler'sche Identität***
Betrachten Sie die Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - 2|x|/\pi$ für alle $x \in [-\pi,\pi]$.

   (a) *Berechnen Sie die Koeffizienten c_n der komplexen Fourierreihe*
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

   (b) *Berechnen Sie die Koeffizienten a_n und b_n der reellen Fourierreihe*
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

   (c) *Zeigen Sie die Euler'sche Identität:*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. ***Komplexe Fourierreihe und alternierende Reihe***
Betrachten Sie die Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch
$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & \textit{für alle} \quad 0 \le x \le \pi, \\ x(\pi + x), & \textit{für alle} \ -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

   (a) *Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe von f.*

   (b) *Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.*

   (c) *Beweisen Sie, dass gilt*
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

3. **Fourierreihen in $d \ge 2$ Dimensionen**
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ist 2π-periodisch, falls gilt $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + 2\pi \boldsymbol{e}_i)$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ und $i \in \{1, ..., d\}$. Hier bezeichnet $\boldsymbol{e}_i = (0, ..., 1, ...0)^\top$ den Einheitsvektor in die i-te Koordinatenrichtung. Für $\boldsymbol{m} = (m_1, ..., m_d)^\top \in \mathbb{Z}^d$ definieren wir dann komplexe Fourierkoeffizienten durch:
$$c_{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} f(\boldsymbol{x}) e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{m}} dx_1 ... dx_d.$$
Plotten Sie in einem geeigneten Ausschnitt die folgenden Funktionen und berechnen Sie ihre Fourierkoeffizienten ($d = 2$):

(a) $f_1(x_1, x_2) = \sin(x_1)\cos(2x_2)$

(b) f_2, die 2π-periodische Fortsetzung von $f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$ für $(x_1, x_2)^\top \in [-\pi, \pi]^2$ nach $\mathbb{R}^2$

(c) f_3, die 2π-periodische Fortsetzung von $f_3(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq 1 \\ 0, & \max\{|x_1|, |x_2|\} > 1, \end{cases}$

für $(x_1, x_2)^\top \in [-\pi, \pi]^2$ nach $\mathbb{R}^2$.