D-HEST | Mathematik III | HS 2021

Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Serie 3

Abgabe: Dienstag, den 19. Oktober 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Fourierreihen, Inhomogene DGL mit periodischer Anregung

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

---

1. ***Fourierreihen*** *(Prüfungsaufgabe HS 2018)*
   Die Funktion f sei gegeben als $f(t) = e^{2t}$ auf $[-1, 1[$, 2-periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$.

   Weiterhin konvergiert die reelle Fourierreihe der Funktion f auf $]-1, 1[$ gegen f, es gilt also:

   $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) \qquad \textit{für } t \in]-1,1[$$

   mit $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

   (a) *Skizzieren Sie den Graphen der Funktion im Intervall $[-3, 3[$.*

   (b) *Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von f.*

   Hinweis: *Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $e^{i\pi n} = (-1)^n$.*

   (c) *Weisen Sie nach, dass für jede P-periodische Funktion g $(P > 0)$ die Beziehungen*

   $$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n}, && \textit{für } n \geq 0, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}), && \textit{für } n \geq 1, \end{aligned}$$

   zwischen komplexen und reellen Fourierkoeffizienten von g gelten.

   (d) *Bestimmen Sie mit **c)** die reelle Fourierreihe von f.*

   (e) *Zeigen Sie mithilfe der reellen Fourierreihe von f, dass gilt:*

   $$\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4 + n^2\pi^2} = \frac{1}{4\sinh(2)}.$$

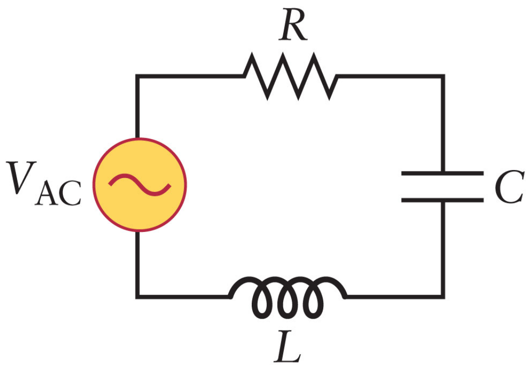
2. **Inhomogene DGL mit periodischer Anregung**
   Wir betrachten einen LCR-Schwingkreis in Reihenschaltung mit periodischer Anregung V_{AC}, wobei $V_{AC}(t) = 5t(\pi^2 - t^2)$ für $t \in [-\pi, \pi[$ 2π-periodisch fortgesetzt werde.

   Aus einer Spannungsbilanz erhält man

   $$L\frac{d^2}{dt^2}I(t) + R\frac{d}{dt}I(t) + \frac{1}{C}I(t) = \frac{d}{dt}V_{AC}(t). \tag{1}$$

   Es seien $L = 10$, $R = 300$ und $C = 0.001$ in geeigneten Einheiten.

   (a) Lösen Sie die zugehörige homogene Differentialgleichung und zeigen Sie, dass für jede Lösungsfunktion I_h gilt: $\lim_{t\to\infty} I_h(t) = 0$.



(b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von $\frac{d}{dt}V_{AC}(t)$.

(c) Berechnen Sie eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (1) mithilfe eines Reihenansatzes.

Hinweis: Es gilt $\frac{d}{dt}V_{AC}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$ mit den in b) gefundenen Koeffizienten a_n, b_n. Finden Sie für jedes $n \geq 1$ eine spezielle Lösung der Gleichung

$$L\frac{d^2}{dt^2}I_n(t) + R\frac{d}{dt}I_n(t) + \frac{1}{C}I_n(t) = a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$$

und für $n = 0$ eine spezielle Lösung der Gleichung

$$L\frac{d^2}{dt^2}I_0(t) + R\frac{d}{dt}I_0(t) + \frac{1}{C}I_0(t) = \frac{a_0}{2}.$$

Dann ist $I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(t)$ eine Lösung von (1).