D-HEST | Mathematik III | HS 2021

Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Serie 4

Abgabe: Dienstag, den 26. Oktober 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Diagonalisierung von Matrizen, Systeme linearer Differentialgleichungen

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

---

1. ***Diagonalisierung von Matrizen***
   Betrachten Sie folgende $2 \times 2-$*Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Ist A *diagonalisierbar? Falls ja, finden Sie eine Diagonalmatrix* D *und eine invertierbare Matrix* P *so dass* $A = PDP^{-1}$.

   (b) Berechnen Sie A^n *für* $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Berechnen Sie $\exp(A)$.

2. ***Systeme linearer Differentialgleichungen I***
   Wir betrachten ein Modell für die Entstehung von Humus aus absterbenden Bäumen:

$$\begin{aligned} H(t) &= \text{Biomasse von Humus,} \\ A(t) &= \text{Biomasse abgestorbener Bäume,} \\ L(t) &= \text{Biomasse lebender Bäume,} \end{aligned}$$

   wobei t *die Zeit (in Dekaden) beschreibt. Die Dynamik dieses Systems sei gegeben durch das System von Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} H'(t) &= -H(t) + 3A(t), \\ A'(t) &= -3A(t) + 5L(t), \\ L'(t) &= -5L(t). \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems mit den Anfangsbedingungen $H(0) = A(0) = 0$ *und* $L(0) = L_0$.

   (b) Zu welchem Zeitpunkt t^* *ist die Biomasse von Humus maximal?*

3. **Systeme linearer Differentialgleichungen II** Bestimmen Sie die Lösung zum Anfangswertproblem mit DGL-System

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) &= 3x_1(t) - 9x_2(t) + 7x_3(t) \end{aligned}$$

   und Anfangswerten $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (3, 6, 10)$.