D-HEST Mathematik III HS 2021
Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Serie 5

Abgabe: Dienstag, den 2. November 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Diagonalisierung von Matrizen, Systeme linearer Differentialgleichungen

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

---

1. ***Diagonalisierung von Matrizen***
Betrachten Sie folgende $2 \times 2-$*Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) *Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, dann finden Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix P so dass* $A = PDP^{-1}$.

   (b) *Berechnen Sie* A^n *mit* $n \in \mathbb{N}$.

   (c) *Berechnen Sie* $\exp(A)$.

   (d) *Was können Sie aus Teilaufgabe (c) über Rotationen in der Ebene folgern?*

2. **Variation der Konstanten**
Wir betrachten das inhomogene Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + g(t), \qquad y(0) = y^{(0)},$$

wobei A eine $n \times n$-Matrix ist, $y = (y_1, ..., y_n)^\top$, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und $g(t) = (g_1(t), ..., g_n(t))^\top$ mit $g_1, ..., g_n \in C^0(\mathbb{R})$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist durch

$$y(t) = \exp(tA)y^{(0)} + \int_0^t \exp((t-u)A)g(u)du.$$

   Hinweis: Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dt}e^{-tA}y(t) = e^{-tA}g(t)$. Integrieren Sie diese Gleichung.

   (b) Lösen Sie mithilfe von (a) das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) + t, & y_1(0) &= 1 \\ y_2'(t) &= -y_1(t) - \sin(t), & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

3. ***Differentialgleichungen*** **n**$-$***ter Ordnung***
Finden Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

   (a) $y^{(4)}(t) - 3y''(t) + 2y'(t) = t$

   (b) $y^{(8)}(t) + 2y^{(6)} - 2y''(t) - y(t) = 25e^{2t} + 3t$

Hinweis*: Das charakteristische Polynom in Teilaufgabe (b) hat die reellen Nullstellen* $\lambda_{1,2} = \pm 1$.