D-HEST | Mathematik III | HS 2021
Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Serie 6

Abgabe: Dienstag, den 9. November 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Kompartimentmodelle

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

---

1. ***2-Kompartimentmodell***
   Für ein Medikament sei folgendes 2-Kompartimentmodell mit $0 < b < 1$ gegeben:

$$\boxed{\text{Blut}} \xrightarrow{\;b\;} \boxed{\text{Leber}}$$

   Dies bedeutet, dass das Medikament mit einer Rate proportional zur Medikamentenmenge im Blut (und Proportionalitätskonstante b) in die Leber fliesst. Zur Zeit $t \geq 0$ sei die Medikamentenmenge im Blut $y_1(t)$, in der Leber sei sie $y_2(t)$.

   (a) *Zu Beginn $t = 0$ sei die Menge im Blut gleich $y_{1,0}$ und in der Leber gleich 0. Bestimmen Sie die Entwicklungen der Medikamentenmengen:*

$$t \mapsto y_1(t), \quad t \mapsto y_2(t)$$

   und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für $y_{1,0} = 10$ und $b = \frac{1}{2}$.

   (b) *Um eine Mindestmenge $y_{1,1}$ im Blut mit $0 < y_{1,1} < y_{1,0}$ zu sichern, müssen wir die Infusion mit $y_{1,0}$ periodisch wiederholen. Bestimmen Sie die Periode in Abhängigkeit von b, $y_{1,0}$, $y_{1,1}$ (das heisst bestimmen Sie die Zeit nachdem die Mindestmenge $y_{1,1}$ erreicht wird) und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.*

   (c) *Wir nehmen nun an, dass wir eine konstante Blutinfusion $g > 0$ haben. Zu Beginn sei in beiden Kompartimenten die Medikamentenmenge gleich 0.*

      i. *Zeichnen Sie das zugehörige Kompartiment-Modell, bestimmen Sie die Entwicklungen $t \mapsto y_1(t), t \mapsto y_2(t)$ und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für $g = 10$ und $b = \frac{1}{2}$.*

      ii. *Angenommen, wir unterbrechen die Infusion bei $t = T_1$ mit einer Menge im Blut Y_1. Bestimmen Sie den Verlauf für $t \geq T_1$. Um eine Mindestmenge von Y_2 im Blut zu garantieren, starten wir die Infusion wieder zum Zeitpunkt T_2 (an dem gilt $y_1(T_2) = Y_2$). Bestimmen Sie T_2 und skizzieren Sie den Verlauf zwischen Y_1 und Y_2.*

2. ***3-Kompartimentmodell***

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Muskel}} \arrow[r, "a"'] & \boxed{\text{Blut}} \arrow[r, "b"'] & \boxed{\text{Leber}} \arrow[l, bend right, "c"'] \end{tikzcd}$$

   (a) *Stellen Sie das zugehörige DGL-System $y' = Ay$ auf, welches die Entwicklung einer Substanz in den Kompartimenten beschreibt.*

   (b) *Zeigen Sie, dass es einen stationären Zustand gibt, das heisst, eine von Null verschiedene Lösungsfunktion $\{t \mapsto y^{\infty}(t)\}$, welche nicht von t abhängt.*

(c) *Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ für $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$.*

(d) *Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = (1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$ und $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$.*
Hinweis: *Betrachten Sie $J = T^{-1}AT$ mit den Matrizen:*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. **Kompartimentmodelle: Stationäre Zustande**
Wir untersuchen *stationäre Zustände* von linearen DGL-Systemen mit konstanten Koeffizienten genauer. Mathematisch handelt es sich dabei um konstante Lösungen $t \mapsto Y_\infty \in \mathbb{R}^n$ eines inhomogenes DGL-System der Form $Y'(t) = AY(t) + g(t)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

(a) Zeigen Sie, dass es keinen stationären Zustand Y_∞ geben kann, wenn g nicht konstant ist.

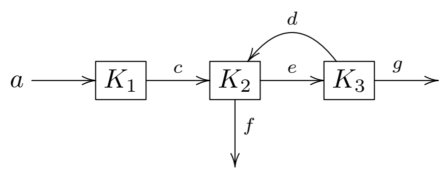
(b) Beurteilen Sie, welche der folgenden Aussagen über das System

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + b, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

wahr und welche falsch sind. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an:

- Das System (1) hat immer einen stationären Zustand.
- Es gibt DGL-Systeme der Form (1) mit genau zwei verschiedenen stationären Zuständen.
- Falls alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, gilt für jede Lösung Y von (1): $Y(t) \to Y_\infty$ für $t \to \infty$, wobei Y_∞ der stationäre Zustand ist.
  Hinweis: Ist Y_∞ ein stationärer Zustand, dann ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems: $Y(t) = \exp(tA) \cdot C + Y_\infty$, $C \in \mathbb{R}^n$.
- Falls für eine Lösung Y von (1) gilt: $Y(t) \to Y_\infty$ für $t \to \infty$, wobei Y_∞ ein stationärer Zustand ist, dann hat A nur Eigenwerte mit negativem Realteil.

(c) Wir betrachten nun das 3-Kompartiment-Modell für $a, c, d, e, f, g > 0$:



Schreiben Sie dieses System in der Form $Y'(t) = A \cdot Y(t) + b$ und finden Sie alle stationären Zustände dieses Systems für den Fall $a = c = g = 3$, $d = e = f = 1$.