D-HEST
Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Mathematik III

HS 2021

Serie 7

Abgabe: Dienstag, den 16. November 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Laplace-Transformation, Berechnung von Integralen mittels Laplace-Transformation

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

---

1. ***Laplace-Transformation I***
   Die Laplace-Transformierte einer stückweise stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist definiert für* $s \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > \alpha_f\}$ *mit*[1] $\alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; |f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ *für ein* $C > 0\}$ *durch die Formel*
   $$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$
   Berechnen Sie die Laplace-Transformierte folgender Funktionen:
   (a) Für gegebene und fixe $a, A > 0$*:*
   $$f(t) = \begin{cases} A & \textit{falls} \quad 0 \leq t < a \\ -A & \textit{falls} \quad a \leq t < 2a \\ 0 & \textit{falls} \quad 2a \leq t \end{cases}$$
   (b) $f(t) = 2te^{-4t}$
   (c) $f(t) = t^3$
   (d) $f(t) = \cos(\omega t)$ *für* $\omega > 0$

2. ***Laplace-Transformation II***
   Die Laplace-Transformierte einer stückweise stetigen Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist definiert für* $s \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > \alpha_f\}$ *mit* $\alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; |f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ *für ein* $C > 0\}$ *durch die Formel*
   $$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$
   Entscheiden Sie jeweils, ob die Laplace-Transformierte existiert (also ob $\alpha_f < \infty$*) und berechnen Sie sie in diesem Fall:*
   (a) $f_1(t) = t^2 - 2t + 2$
   (b) $f_2(t) = e^{t^2}\cos(t^2)$
   (c) $f_3(t) = \cos(\beta t) - 3\sin(\beta t)$*, wobei* $\beta > 0$
   (d) $f_4(t) = \sinh(3t - 2)$

---

[1]Hierbei gelte nach Konvention: $\inf \emptyset := \infty$

3. **Berechnung von Integralen mittels Laplace-Transformation**
In dieser Aufgabe wollen wir mithilfe der Laplace-Transformation zeigen, dass

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc}(t) dt = \frac{\pi}{2},$$

wobei $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ für $t > 0$, $\operatorname{sinc}(0) = 1$. Wir gehen in mehreren Schritten vor:

(a) Zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierte von sinc existiert.
Hinweis: Benutzen Sie die Regel von de l'Hospital, um $\lim_{t\to 0} \operatorname{sinc}(t)$ zu berechnen.

(b) Berechnen Sie $\int_s^\infty e^{-\sigma t} d\sigma$ für $s, t > 0$. Stellen Sie damit

$$\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

als Doppelintegral dar.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}[\operatorname{sinc}](s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$ gilt.
Hinweis: Vertauschen Sie die Reihenfolge des Doppelintegrals aus **b)**. Verwenden Sie $\frac{d}{d\sigma} \arctan(\sigma) = \frac{1}{1+\sigma^2}$.

(d) Berechnen Sie damit $\int_0^\infty \operatorname{sinc}(t) dt$.