D-HEST Mathematik III HS 2021
Prof. Dr. E. W. Farkas
P. Zimmermann

Serie 8

Abgabe: Dienstag, den 23. November 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Laplace-Transformation, Faltung

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

---

1) ***Multiple Choice Aufgaben zur Laplace-Transformation***
Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben kreuzen Sie die richtige Aussage an.

(a) *Die Laplace-Transformierte von* $f(t) = (t-2)^2\Theta(t-1)$ *ist*
- ☐ $\frac{2e^{-2s}}{s^3}$
- ☐ $\frac{2}{s^3}$
- ☐ $\frac{2e^{-s}}{s^3} - \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s}$
- ☐ $\frac{2e^{-s}}{s^3} + \frac{2e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s}$

(b) *Die Laplace-Transformierte von* $f(t) = e^{2t}\sin(t)\Theta(t)$ *ist*
- ☐ $\frac{1}{4s^2+1}$
- ☐ $\frac{1}{(s-2)^2+1}$
- ☐ $\frac{2}{s^2+4}$
- ☐ $\frac{1}{(s+2)^2+1}$

(c) *Die Laplace-Transformierte von* $f(t) = \cos(t-\pi)\Theta(t-\pi)$ *ist*
- ☐ $\frac{1}{(s-\pi)^2+1}$
- ☐ $\frac{e^{\pi s}s}{s^2+1}$
- ☐ $\frac{s\pi}{s^2+\pi^2}$
- ☐ $\frac{e^{-\pi s}s}{s^2+1}$

Hinweis: *Hier bezeichnet* Θ *die Heaviside-Funktion die gegeben ist durch*

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & \textit{wenn} \quad t < 0 \\ 1, & \textit{wenn} \quad t \geq 0. \end{cases}$$

2) ***Laplace-Transformation***
Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f_i\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 4$, *jeweils die Laplace-Transformierte unter Verwendung geeigneter Transformationssätze.*

(a) $f_1(t) = \cos(3t-2)\Theta(3t-2)$

(b) $f_2(t) = 20^{19t}$

(c) $f_3(t) = e^{-3t}\sin(\pi t)$

(d) $f_4(t) = t^2 + (t+2)\Theta(t-1)$

3) **Faltung I**

Die *Faltung* von zwei (absolut) integrierbaren Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist die Funktion $f * g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\, ds$$

für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass die Faltung die folgenden elementaren Eigenschaften erfüllt:

(a) Kommutativität: $f * g = g * f$,

(b) Assoziativität: $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(c) Lineartität: $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha(f * g) + \beta(f * h)$,

(d) Differentiation: $(f * g)' = f' * g$ (f ist hier stetig differenzierbar),

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen sind.

4) ***Faltung II***

Sei $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = \sin(t)$.

(a) Berechnen Sie die Faltung $f * f$.

(b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von $f * f$ ohne Verwendung des Faltungssatzes.