Serie 9

Abgabe: Dienstag, den 30. November 2021 online auf der Vorlesungs-Homepage.

Themen: Faltungssatz, Inverse Laplace-Transformation, Laplace-Transformation periodischer Funktionen

Wichtig: Es werden nur die Aufgaben in *kursiver Schrift* korrigiert. Um einen Notenbonus von 0.25 an der Prüfung zu erhalten, muss man jedoch 50% von **allen Aufgaben** sinnvoll bearbeiten.

---

1) ***Multiple Choice Aufgaben***
Bei den folgenden Multiple Choice Aufgaben kreuzen Sie die richtige Aussage an.

(a) *Die Laplace-Transformierte von* $f(t) = t\sin(2t)$ *ist*

- ☐ $\frac{4s}{(s^2+4)^2}$
- ☐ $\frac{s}{(s^2+4)^2}$
- ☐ $\frac{4s}{s^2+4}$
- ☐ $\frac{4s}{(s^2+4)^3}$

(b) *Die Faltung von* $f(t) = e^{-at}$ *und* $g(t) = t$*, wobei* $a > 0$*, ist*

- ☐ $\frac{e^{at}}{a^2}[ate^{at} + e^{at} + 1]$
- ☐ $\frac{e^{-at}}{a^2}[ate^{-at} - e^{at} + 1]$
- ☐ $\frac{e^{-at}}{a^2}[ate^{at} - e^{at} + 1]$
- ☐ $\frac{e^{-at}}{a^2}[ate^{at} - e^{at} - 1]$

(c) *Die inverse Laplace-Transformation von* $F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$ *ist*

- ☐ $e^{-t} - e^{-2t}$
- ☐ $e^{e^{-2t}+e^{-3t}}$
- ☐ $e^{-2t} - e^{-3t}$
- ☐ *existiert nicht*

2) ***Faltungssatz***
Berechnen Sie mithilfe des Faltungssatzes $\mathcal{L}^{-1}[u]$ *und* $\mathcal{L}^{-1}[v]$*, wobei*

$$u(s) = \frac{1}{s^3(s-4)}, \qquad v(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

3) ***Inverse Laplace-Transformation***
Berechnen Sie die inverse Laplace-Transformation folgender Funktionen

(a) $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$

(b) $G(s) = \frac{3s^2-3s+1}{s^3-2s^2+s}$

4) **Laplace-Transformation periodischer Funktionen**

(a) Zeigen Sie mithilfe des Verschiebungssatzes, dass für eine periodische, stückweise stetige, auf $[0, \infty)$ definierte Funktion f mit Periode $T > 0$ gilt:

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt.$$

Hinweis: Teilen Sie $\mathbb{R}$ in Intervalle der Länge T auf und benutzen Sie, dass für q mit $|q| < 1$ gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

(b) Benutzen Sie (a), um die Laplace-Transformierte folgender Funktionen zu berechnen:

(A) $f_1(t) = \sin(2t)$

(B) $f_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2] \\ 2, & t \in]2, 3] \\ 0, & t \in]3, 4], \end{cases}$, 4-periodisch fortgesetzt nach $[0, \infty)$.