Mathematik III
Kapitel 4: Laplace-Transformation

Prof. Dr. Erich Walter Farkas
http://www.math.ethz.ch/∼farkas
HS 2021

Ein grosser Dank geht an meinen Doktoranden Alexander Smirnow, der dieses Skript mitgestaltet und übersetzt hat. Des Weiteren bedanken wir uns bei Philipp Zimmermann für hilfreiche Kommentare und Verbesserungsvorschläge.

Trotz unserer Bemühungen, das Skript fehlerfrei zu halten, schleichen sich doch ab und an Fehler ein. Es ist immer eine grosse Hilfe und wir freuen uns, wenn Fehler gemeldet werden, sodass wir diese schnell beheben können.

Bitte senden Sie Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge an Alexander Smirnow (alexander.smirnow@bf.uzh.ch).

Die *Laplace-Transformation* ist ein wichtiges und nützliches Werkzeug in der Mathematik. Ihre Anwendungen reichen von der Bild- und Signalverarbeitung bis zum Lösen partieller Differentialgleichungen.

In diesem Abschnitt stellen wir die Laplace-Transformation und ihre wichtigsten Eigenschaften vor. Am Ende dieses Abschnitts werden wir sehen, wie sie uns bei der Lösung von Differentialgleichungen hilft.

Laplace-Transformation - Definition und Beispiele

Definition 4.1. Die *Laplace-Transformierte* einer Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ ist die Funktion $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.1}$$

Das Symbol $\mathcal{L}$ bezeichnet die *Laplace-Transformation*, die eine Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ auf ihre *Laplace-Transformierte* oder *Spektralfunktion* $\mathcal{L}f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ abbildet.

Die gebräuchlichsten Notationen für die Spektralfunktion sind

$$\mathcal{L}f = \mathcal{L}\{f\} = F\,.$$

Wenn wir die Laplace-Transformation auf eine Formel (ohne Namen) anwenden wollen, schreiben wir runde Klammern,

$$\mathcal{L}(f(t))\,,\ \text{zum Beispiel } \mathcal{L}(t^2) \text{ für die Funktion } t \mapsto t^2\,.$$

Wenn wir die Laplace-Transformation punktweise betrachten, schreiben wir

$$\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) = F(s),\ \text{für } s \in \mathbb{C}\,.$$

Die Bezeichnung F der Laplace-Transformierten von f kann verwirrend sein, zumal F oft die Stammfunktion von f bezeichnet, also $F' = f$. Wenn man jedoch F schreiben will, ist es üblich, das sogenannte *Doetsch-Symbol* zu verwenden,

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet F.$$

Diese Art der Verbindung zweier Funktionen wird manchmal als *Korrespondenz* bezeichnet. Sie ist besonders nützlich, wenn wir die Entsprechung zweier Formeln angeben wollen, wie zum Beispiel

$$t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2},$$

was bedeutet, dass die Laplace-Transformierte von $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ gegeben ist durch $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2}$.

Wir definieren nun hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Laplace-Transformierten.

Definition 4.2. Sei E die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sodass

1. $f = 0$ auf $\mathbb{R}_{<0}$,
2. $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}_{>0}$, und alle $t \in \mathbb{R}$,
3. f ist stückweise stetig.

Die erste Bedingung erlaubt uns, den Definitionsbereich von f auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zu beschränken. Dies ist in Definition 4.1 notwendig und es ist manchmal nützlich, Funktionen auf $\mathbb{R}$ statt auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ zu betrachten.

Umgekehrt, wenn wir $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ betrachten, dann setzen wir implizit $f = 0$ auf $\mathbb{R}_{<0}$, um eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion zu erhalten. Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht 0 auf $\mathbb{R}_{<0}$ sind, setzen wir einfach $f = 0$ auf $\mathbb{R}_{<0}$, wie im obigen Beispiel mit $t \mapsto t$.

Wenn f die zweite Bedingung erfüllt, sagt man *“f ist von exponentieller Ordnung”*, was bedeutet, dass die Wachstumsrate höchstens die einer Exponentialfunktionen ist. Wir definieren das kleinste solche α als

$$\alpha_f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |f(t)| \leq Ce^{\alpha t}\}\,.$$

Die letzte Bedingung besagt, dass f nur *hebbare Unstetigkeitsstellen* oder *Sprungstellen* besitzen darf, wesentliche Unstetigkeitsstellen sind nicht erlaubt.

Das folgende Ergebnis zeigt, dass diese Bedingungen für die Existenz der Laplace-Transformation hinreichend sind.

Satz 4.3. Sei $f \in E$, dann ist $\mathcal{L}f$ auf $\{s \in \mathbb{C} \,|\, \Re(s) > \alpha_f\}$ wohldefiniert. Des Weiteren gilt $\lim_{\Re(s)\to\infty} \mathcal{L}f(s) = 0$.

Beweis. Sei $s_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s_0) = x_0 > \alpha_f$. Insbesondere gibt es ein $\alpha < x_0$ und ein $C > 0$, so dass die Bedingung 2. in Definition 4.2 erfüllt ist. Da für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{iy}| = 1$, erhalten wir

$$|e^{-s_0 t} f(t)| = |e^{-(x_0+iy_0)t}||f(t)| = e^{-x_0 t}|f(t)| \le Ce^{(\alpha - x_0)t}\,.$$

Somit gilt

$$|\mathcal{L}f(s_0)| = \left|\int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^\infty |\,e^{-s_0 t} f(t)\,|\,\mathrm{d}t$$

$$\le \int_0^\infty Ce^{(\alpha - x_0)t}\,\mathrm{d}t = \frac{C}{x_0 - \alpha} < \infty\,,$$

und insbesondere gilt $|\mathcal{L}f(s_0)| \le \frac{C}{x_0 - \alpha} \xrightarrow{x_0 \to \infty} 0$. $\square$

Beispiel 4.4. Wir betrachten einige kurze Beispiele, um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie diese Transformation funktioniert. In allen Beispielen berechnen wir die Laplace-Transformationen direkt mit Definition 4.1.

1. Zuerst berechnen wir die Laplace-Transformation der *Heaviside-Funktion* $\Theta : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, definiert als

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0\,, \\ 1 & t \geq 0\,. \end{cases}$$

Zunächst müssen wir prüfen, ob $\Theta \in E$ ist. Per Definition ist $\Theta = 0$ auf $\mathbb{R}_{<0}$ und hat nur einen Sprung bei $t = 0$. Die Funktion ist von exponentieller Ordnung mit $\alpha_f = 0$ und $C = 1$. Daher ist für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 0$ die Laplace-Transformation von Θ wohldefiniert und wir berechnen

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\Theta(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty} = 0 - \frac{1}{-s} = \frac{1}{s}\,.$$

2. Betrachten Sie die Identität $\mathrm{id} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathrm{id}(t) = t$. Zeigen Sie, dass Bedingungen 1 und 3 in Definition 4.2 gelten und dass auch Bedingung 2 mit $\alpha_f = 0$ erfüllt ist. Die Spektralfunktion ist somit für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 0$ definiert und mit partieller Integration erhalten wir

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} t \,\mathrm{d}t = \underbrace{-\frac{e^{-st} t}{s}\Big|_{t=0}^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} \,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2}\,.$$

Beachten Sie auch, dass nach der Regel von de L'Hospital gilt

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-st} t| = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\Re(s)t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Re(s) e^{\Re(s)t}} = 0\,.$$

3. Als nächstes berechnen wir die Laplace-Transformierte von $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [-1, 1]$ mit $f(t) = \sin(at)$, $a > 0$. Zeigen Sie, dass $f \in E$ und dass $\alpha_f = 0$. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 0$ erhalten wir mithilfe der eulerschen Identität

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \sin(at) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-st} (e^{iat} - e^{-iat}) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s - ia} - \frac{1}{s + ia} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{s + ia}{s^2 + a^2} - \frac{s - ia}{s^2 + a^2} \right) \\
&= \frac{a}{s^2 + a^2} \,.
\end{aligned}$$

Wir können dieses Integral auch lösen, indem wir zweimal partiell integrieren,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}\sin(at)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{-\frac{e^{-st}}{a}\cos(at)\Big|_{t=0}^{\infty}}_{=\frac{1}{a}} - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos(at)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\Big(\underbrace{\frac{e^{-st}}{a}\sin(at)\Big|_{t=0}^{\infty}}_{=0} + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\sin(at)\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin(at)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
$$

Dann lösen wir die Gleichung nach dem Integral auf und erhalten

$$
\int_0^\infty e^{-st}\sin(at)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{s^2+a^2}\,.
$$

Übung 4.5. Nun können Sie an weiteren Beispielen üben. Zeige, dass die folgenden Funktionen in E enthalten sind und berechnen Sie ihre Laplace-Transformierten unter Angabe der Definitionsbereiche.

1. Sei $f_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(t) = 1_{[a,b]}(t)$, wobei $0 \leq a \leq b$, und zeigen Sie, dass $\mathcal{L}f_1(s) = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}$.
2. Sei $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die n-te Potenz $f_2(t) = t^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$, und zeigen Sie, dass $\mathcal{L}f_2(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.
3. Sei $f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Kosinusfunktion $f_3(t) = \cos(at)$, mit $a > 0$, und zeigen Sie, dass $\mathcal{L}f_3(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$.
4. Sei $f_4 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion $f_4(t) = e^{at}$, und zeigen Sie, dass für $s > a$ gilt $\mathcal{L}f_4(s) = \frac{1}{s-a}$.

Eigenschaften der Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation hat viele interessante und nützliche Eigenschaften. Wir werden die wichtigsten beweisen und einige Beispiele betrachten.

Die folgenden Ergebnisse gelten für $s \in \mathbb{C}$ mit *genügend grossem Realteil*. Mit Ausnahme der folgenden Linearitätseigenschaft werden wir den Definitionsbereich nicht mehr angeben.

Proposition 4.6. *(Linearität)* Die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$ ist komplex-linear. Das bedeutet, dass für $f, g \in E$ mit den Laplace-Transformierten $\mathcal{L}f$, $\mathcal{L}g$ und zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$ gilt $af + bg \in E$ und

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}f + b\mathcal{L}g\,.$$

Beweis. Wenn f und g auf $\mathbb{R}_{<0}$ gleich 0 sind, dann gilt das auch für $af + bg$. Das gilt auch für stückweise Stetigkeit auf $\mathbb{R}$. Wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $|f(t)| \leq C_1 e^{\alpha_1 t}$ und $|g(t)| \leq C_2 e^{\alpha_2 t}$, dann gilt auch

$$|af(t) + bg(t)| \leq |a||f(t)| + |b||g(t)| \leq Ce^{\alpha t},$$

für $C = 2\max\{|a|C_1, |b|C_2\}$ und $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Somit ist $af + bg \in E$.

Unter Verwendung von Definition 4.1 und der Linearität des Integrals erhalten wir für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > \max\{\alpha_{f_1}, \alpha_{f_2}\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{a_1 f_1 + a_2 f_2\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t))\,\mathrm{d}t \\
&= a_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\,\mathrm{d}t + a_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= a_1 \mathcal{L}f_1(s) + a_2 \mathcal{L}f_2(s),
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Beispiel 4.7. Betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = 3t - 5t^2 + 3\sin(t)$. Die Ergebnisse in Beispiel 4.4 und Übung 4.5 und der Linearität liefern uns für $s \in \mathbb{C}$ mit $\Re(s) > 0$

$$\mathcal{L}f(s) = 3\mathcal{L}(t)(s) - 5\mathcal{L}(t^2)(s) + 3\mathcal{L}(\sin(t))(s)$$

$$= 3\frac{1}{s^2} - 5\frac{2}{s^3} + 3\frac{1}{1+s^2} = \frac{3}{s^2} - \frac{10}{s^3} + \frac{3}{1+s^2}.$$

Proposition 4.8. *(Ähnlichkeitssatz)* Seien $f \in E$ und $a > 0$. Dann liegt die Funktion $\mathbb{R}_{\geq 0} \ni t \mapsto f(at) \in \mathbb{R}$ in E und hat die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t))\left(\frac{s}{a}\right) .$$

Wenn $0 < a < 1$, dann sprechen wir von einer *Streckung*. Im Fall $a > 1$ spricht man von einer *Kontraktion*.

Beweis. Einige Überlegungen zeigen, dass diese Funktion zu E gehört. Mit der Substitution $\hat{t} = at$ erhalten wir dann

$$\mathcal{L}(f(at))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}\hat{t}} f(\hat{t})\,\mathrm{d}\hat{t} = \frac{1}{a}\mathcal{L}f\left(\frac{s}{a}\right) ,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

Beispiel 4.9. Wir berechnen die Laplace-Transformierte der Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = \sin(3t)$. Laut dem Ähnlichkeitssatz haben wir $\mathcal{L}(\sin(3t))(s) = \frac{1}{3}\mathcal{L}(\sin(t))\left(\frac{s}{3}\right)$. Aus Beispiel 4.4 wissen wir bereits, dass $\mathcal{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{1+s^2}$, und somit gilt

$$\mathcal{L}(\sin(3t))(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{s}{3}\right)^2} = \frac{3}{9+s^2}\,.$$

Für welches $s \in \mathbb{C}$ ist diese Transformierte wohldefiniert?

Proposition 4.10. *(Verschiebungen)* Seien $f \in E$ und $h > 0$. Die Laplace-Transformation besitzt folgende Eigenschaften:

1. *Verschiebung nach rechts:*

$$\mathcal{L}(f(t-h))(s) = e^{-hs}\mathcal{L}f(s)\,,$$

2. *Verschiebung nach links:*

$$\mathcal{L}(f(t+h))(s) = e^{hs}\left(\mathcal{L}f(s) - \int_0^h e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Beweis. Argumentieren Sie als Übung, dass $t \mapsto f(t-h)$ in E liegt, während $t \mapsto f(t+h)$ (streng genommen) nicht in E liegt. Erklären Sie, warum die Laplace-Transformierte von $t \mapsto f(t+h)$ existiert.

1. Unter Verwendung der Substitution $\hat{t} = t - h$ und da $f(t) = 0$ für $t < 0$, erhalten wir

$$\mathcal{L}(f(t-h))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-h)\,\mathrm{d}t = \int_{-h}^\infty e^{-s(\hat{t}+h)} f(\hat{t})\,\mathrm{d}\hat{t}$$

$$= e^{-hs} \int_0^\infty e^{-s\hat{t}} f(\hat{t})\,\mathrm{d}\hat{t} = e^{-hs} \mathcal{L}f(s)\,.$$

2. Hier verwenden wir die Substitution $\hat{t} = t + h$. Aber nun müssen wir die Null als $0 = \int_0^h e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^h e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ hinzufügen, um die gewünschte Form zu erhalten,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t+h))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t+h)\,\mathrm{d}t = \int_h^\infty e^{-s(\hat{t}-h)} f(\hat{t})\,\mathrm{d}\hat{t} \\
&= e^{hs} \int_h^\infty e^{-s\hat{t}} f(\hat{t})\,\mathrm{d}\hat{t} \\
&= e^{hs} \left(\int_h^\infty e^{-s\hat{t}} f(\hat{t})\,\mathrm{d}\hat{t} + \int_0^h e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^h e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= e^{hs} \left(\int_0^\infty e^{-s\hat{t}} f(\hat{t})\,\mathrm{d}\hat{t} - \int_0^h e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= e^{hs} \left(\mathcal{L}f(s) - \int_0^h e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \right),
\end{aligned}
$$

womit die zweite Behauptung bewiesen ist. $\square$

Beispiel 4.11. Betrachten wir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch die Identität auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und durch 0 auf $\mathbb{R}_{<0}$, und sei $h > 0$.

Wir berechnen nun die Laplace-Transformierte von $g_1 : t \mapsto f(t-h)$ und $g_2 : t \mapsto f(t+h)$. Wir wissen aus Beispiel 4.4, dass $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2}$. Somit erhalten wir unter Anwendung der ersten Verschiebungseigenschaft

$$\mathcal{L}g_1(s) = e^{-hs}\mathcal{L}f(s) = \frac{e^{-hs}}{s^2}\,.$$

ETH zürich

Für die zweite Funktion verwenden wir die zweite Verschiebungseigenschaft und eine ähnliche Berechnung wie in Beispiel 4.4 Teil 2. und erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}g_2(s) &= e^{sh}\Big(\mathcal{L}f(s) - \int_0^h e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\Big) = e^{sh}\left(\frac{1}{s^2} - \int_0^h e^{-st}\, t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= e^{sh}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{e^{-st}t}{s}\Big|_{t=0}^{h} + \int_0^h \frac{e^{-st}}{s}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= e^{sh}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{he^{-sh}}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_{t=0}^{h}\right) \\
&= e^{sh}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{he^{-sh}}{s} + \frac{e^{-sh}}{s^2} - \frac{1}{s^2}\right) = \frac{hs+1}{s^2}\,.
\end{aligned}
$$

Proposition 4.12. *(Dämpfungssatz)* Seien $f \in E$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann liegt $t \mapsto e^{-\lambda t} f(t)$ in E und

$$\mathcal{L}(e^{-\lambda t} f(t))(s) = \mathcal{L}f(s+\lambda)\,.$$

Beweis. Einige kurze Überlegungen zeigen, dass die Funktion in E liegt und wir berechnen direkt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{-\lambda t} f(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}f(s+\lambda).\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 4.13. Finden Sie die Laplace-Transformierte von $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(t) = e^{-2t}t$. Durch Beispiel 4.4 wissen wir, dass $\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$, und daher haben wir durch Proposition 4.12
$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$.

Übung 4.14. Testen Sie Ihr Verständnis der bisher hergeleiteten Eigenschaften, indem Sie die folgenden Aufgaben lösen. Finden Sie die Laplace-Transformierten von

1. $f_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_1(t) = e^{-3t}\sin(t)$,
2. $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_2(t) = t - 2$, und
3. $f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_3(t) = 4e^{-3t}\sin(t) + 2(t-2)$.

Lemma 4.15. *(Ableitungen im Originalbereich)* Sei $f \in E$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, sodass $f' \in E$. Dann ist die Laplace-Transformierte von f' gegeben durch

$$\mathcal{L}f'(s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)\,.$$

Beweis. Partielle Integration führt zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f'(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,\mathrm{d}t = e^{-st} f(t)\Big|_{t=0}^{\infty} + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}f(s)\,,\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Bemerkung 4.16. Dies ist ein wichtiges Ergebnis, das wir beim Lösen linearer Differentialgleichungen verwenden werden. Die Schlüsseleigenschaft ist, dass die Transformierte einer Ableitung f' selbst keine Ableitung beinhaltet.

Beispiel 4.17. Wir bestimmen die Laplace-Transformierte der Kosinusfunktion ausgehend von der gegebenen Laplace-Transformierten der Sinusfunktion. Wir wissen, dass $\mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{a}{a^2+s^2}$. Da $\cos(at) = \frac{1}{a}(\sin(at))'$, erhalten wir

$$\mathcal{L}(\cos(at))(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}((\sin(at))')(s) = \frac{1}{a}\frac{sa}{a^2+s^2} = \frac{s}{a^2+s^2}\,.$$

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Ergebnis, das Sie in Übung 4.5 erhalten haben.

Wir können Lemma 4.15 auf eine beliebige n-te Ableitung verallgemeinern, vorausgesetzt, die Ableitungen liegen in E. Beachten Sie, dass hier f und die ersten $n-1$ Ableitungen von f erscheinen, die alle bei 0 ausgewertet werden.

Proposition 4.18. *(Allgemeine Ableitungen im Originalbereich)* Sei $f \in E$ auf $\mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ mal differenzierbar, sodass $f^{(k)} \in E$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$, dann gilt

$$\mathcal{L}f^{(n)}(s) = s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)\,. \tag{4.2}$$

Beweis. Wir beweisen dieses Ergebnis durch Induktion. Mit Lemma 4.15 haben wir den Induktionsanfang für $n = 1$ gezeigt. Nehmen wir also an, dass Gleichung (4.2) für $n-1$ gilt. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f^{(n)}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = e^{-st} f^{(n-1)}(t)\,\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f^{(n-1)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -f^{(n-1)}(0) + s\mathcal{L}f^{(n-1)}(s) \\
&\overset{\mathrm{IA}}{=} -f^{(n-1)}(0) + s\left(s^{n-1}\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k-1)}(0)\right) \\
&= s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} f^{(k-1)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\
&= s^n\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)\,.
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass Gleichung (4.2) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, vorausgesetzt, dass f n mal differenzierbar ist. $\square$

Proposition 4.19. *(Ableitungen im Bildbereich)* Sei $\mathcal{L}f$ die Laplace-Transformierte einer gegebenen Funktion $f \in E$. Dann ist $\mathcal{L}f$ unendlich oft differenzierbar und die Ableitungen sind für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$(\mathcal{L}f)^{(n)} = \mathcal{L}((-t)^n f(t)). \tag{4.3}$$

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass wenn f von exponentieller Ordnung ist mit $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$, auch $t \mapsto t^n f(t)$ von exponentieller Ordnung ist. In der Tat, sei o.B.d.A. $t \geq 0$, dann gilt $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \geq \frac{t^n}{n!}$, also $|t^n f(t)| \leq |t^n||f(t)| \leq n! e^t Ce^{\alpha t} = \hat{C} e^{\hat{\alpha} t}$. Somit existiert die Laplace-Transformierte von $t \mapsto t^n f(t)$.

Nun können wir Gleichung (4.3) durch Induktion beweisen.

Zuerst zeigen wir den Induktionsanfang für $n = 1$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}f(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty -te^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(-tf(t))(s)\,.$$

Nun nehmen wir an, dass Gleichung (4.3) für $n-1$ gilt, und wir zeigen, dass es auch für n gilt. Eine ähnliche Berechnung ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathcal{L}f)^{(n-1)}(s) \overset{\mathrm{IA}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}((-t)^{n-1}f(t))(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty e^{-st}(-t)^{n-1}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}e^{-st}(t)^{n-1}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st}(-t)^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \mathcal{L}((-t)^n f(t))(s)\,.$$

Nach vollständiger Induktion gilt somit Gleichung (4.3) für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Beispiel 4.20. Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) = e^{-at}$. Wir wollen $(\mathcal{L}f)''$ berechnen. Ein Ansatz wäre also, $\mathcal{L}f$ zu berechnen und zweimal zu differenzieren. Ok, machen wir das: wir setzen $\Theta = 1_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ und erweitern f auf $\mathbb{R}$ mit $f(t) = e^{-at}\Theta(t)$.

Mit dem Dämpfungssatz aus Proposition 4.12 erhalten wir also $\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}\Theta(s+a)$, und aus Beispiel 4.4 wissen wir $\mathcal{L}\Theta(s+a) = \frac{1}{s+a}$. Wir differenzieren diesen Ausdruck zweimal, was zu folgendem Ergebnis führt

$$(\mathcal{L}f)''(s) = (\mathcal{L}\Theta)''(s+a) = \frac{2}{(s+a)^3}\,.$$

Ein anderer Ansatz ist die Verwendung von Proposition 4.19. Dadurch und durch Linearität erhalten wir

$$(\mathcal{L}f)''(s) = \mathcal{L}((-t)^2 e^{-at})(s) = \mathcal{L}(t^2 e^{-at})(s)\,.$$

Wenn wir nun wieder den Dämpfungssatz und Übung 4.5 verwenden, erhalten wir

$$(\mathcal{L}f)''(s) = \mathcal{L}(t^2 e^{-at})(s) = \mathcal{L}(t^2)(s+a) = \frac{2}{(s+a)^3}\,.$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der erste Ansatz simple Funktionen enthält, aber wir müssen differenzieren, während der zweite Ansatz kompliziertere Funktionen enthält, aber wir müssen nicht differenzieren. Die Wahl hängt also wirklich von Ihren Präferenzen und dem zugrundeliegenden Problem ab.

Proposition 4.21. *(Integration im Originalbereich)* Sei $f \in E$ und sei $\mathcal{L}f$ ihre Laplace-Transformierte. Die Laplace-Transformierte von $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$, ist gegeben durch

$$\mathcal{L}g(s) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}\,. \tag{4.4}$$

Beweis. Bemerken Sie, dass $g'(t) = f(t)$ für alle t gilt, in denen f stetig ist. Somit gilt laut Lemma 4.15

$$s\mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}g'(s) + g(0) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + 0 = \mathcal{L}f(s)\,.$$

Dividiert man nun beide Seiten durch s, erhält man die Behauptung. $\square$

Übung 4.22. In dieser Übung werden Sie bekannte Laplace-Transformationen mit einem anderen Ansatz berechnen. Sie können Ihre Ergebnisse anhand der obigen Beispiele überprüfen.

1. Berechnen Sie mithilfe von Proposition 4.21 und der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(\sin(at))$ die Laplace-Transformierte der Funktion $t \mapsto \cos(at)$.
2. Berechnen Sie in ähnlicher Weise die Laplace-Transformierte von $t \mapsto t^2$ mithilfe der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(t)$.

Geben Sie den Definitionsbereich der verwendeten Funktionen an und begründen Sie Ihre Wahl.

Proposition 4.23. *(Integration im Bildbereich)* Sei $f \in E$. Das Integral der Laplace-Transformierten ist gegeben durch

$$\int_s^\infty \mathcal{L}f(u)\,du = \mathcal{L}(t^{-1}f(t))(s). \tag{4.5}$$

Beweis. Wir definieren $g(t) = t^{-1}f(t)$. Laut Proposition 4.19 gilt $\mathcal{L}f = \mathcal{L}(tg(t)) = -(\mathcal{L}g)'$. Somit erhalten wir für s, s_0 mit hinreichend grossen Realteilen und einem Argument über die Wegunabhängigkeit des Integrals

$$\mathcal{L}g(s) - \mathcal{L}g(s_0) = \int_s^{s_0} \mathcal{L}f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Da $\lim_{\Re(s_0)\to\infty} \mathcal{L}g(s_0) = 0$, folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel 4.24. Ermitteln Sie die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) = t^2$ mit dem Wissen, dass $\mathcal{L}(t^3)(s) = \frac{6}{s^4}$ gilt. Mit Proposition 4.23 erhalten wir

$$\mathcal{L}(t^2)(s) = \mathcal{L}(t^{-1}t^3)(s) = \int_s^\infty \frac{6}{t^4}\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{t^3}\Big|_{t=s}^{\infty} = \frac{2}{s^3},$$

wie Sie bereits in Übung 4.5 und Übung 4.22 gesehen haben.

Definition 4.25. *(Faltung)* Die *Faltung* der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Funktion $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert als

$$(f * g)(t) = f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) \,\mathrm{d}\tau \,. \tag{4.6}$$

Wenn die Funktionen f, g nur auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert sind, dann können wir die Integrationsgrenzen einschränken und wir definieren

$$f * g(t) = \int_{0}^{t} f(\tau) g(t - \tau) \,\mathrm{d}\tau \,. \tag{4.7}$$

Bitte *nicht* $f(t) * g(t)$ schreiben. Die Faltung ist zwischen Funktionen definiert und nicht zwischen Zahlen.

Beispiel 4.26. Lassen Sie uns veranschaulichen, was genau die Faltung bewirkt. Betrachten wir dazu Abbildung 4.1. Sei f durch den grünen Graphen und g durch den gestrichelten schwarzen Graphen definiert.

Der durchgezogene schwarze Graph stellt die Funktion $t \mapsto g(t - \tau)$ dar. In der Abbildung oben links ist $\tau = -2,5$, was durch die gestrichelte vertikale Linie angezeigt wird.

Schliesslich stellt der rote Graph $f * g$ dar. Wenn der Graph von g von links nach rechts wandert, schneidet er den Graphen von f, und das Integral über ihr Produkt wird positiv, was durch die grüne Füllung angezeigt wird.

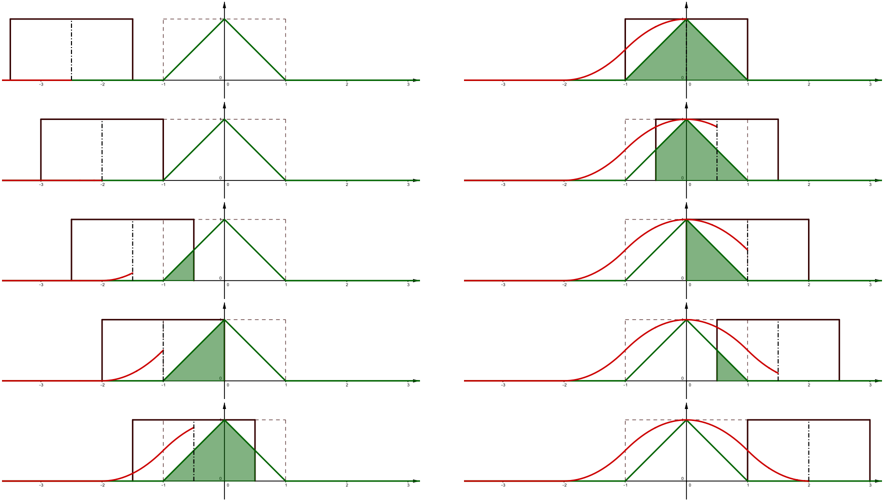

Abbildung 4.1: Visualisierung der Faltung von f und g.

Übung 4.27. Analysieren Sie den grünen und schwarzen Graphen in Abbildung 4.1 und definieren Sie die Funktionen f und g. Berechnen Sie nun $f * g$, die Funktion, die dem roten Graphen entspricht.

Die Faltung erfüllt folgende algebraische Eigenschaften.

Übung 4.28. Seien $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, dann gelten

1. Kommutativgesetz: $f * g = g * f$,
2. Assoziativgesetz: $(f * g) * h = f * (g * h)$,
3. Distributivgesetz: $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Proposition 4.29. Seien $f, g \in E$. Dann gilt $f * g \in E$ und die Laplace-Transformierte ist gleich dem Produkt der Laplace-Transformierten von f und g,

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}\,. \tag{4.8}$$

Beweis. Wir zeigen, dass $f * g \in E$. Da f und g in E liegen, existieren Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$ und $C > 0$, sodass $|f(t)|, |g(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ für alle $t > 0$ gilt. Somit gilt

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &\leq \int_0^t |f(\tau)||g(t-\tau)| \,\mathrm{d}\tau \leq C^2 \int_0^t e^{\alpha\tau} e^{\alpha(t-\tau)} \,\mathrm{d}\tau \\ &= C^2 t e^{\alpha t} \leq C^2 e^{2\alpha t}\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie die beiden anderen Bedingungen als Übung.

Wir berechnen die Laplace-Transformierte, indem wir die Integrale austauschen,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f * g\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) \left(\int_\tau^\infty e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau) \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) \, \mathcal{L}g(s) \, \mathrm{d}\tau = \mathcal{L}f(s) \mathcal{L}g(s) \,,
\end{aligned}
$$

womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

Faltungen kommen in vielen verschiedenen Bereichen der Technik vor, insbesondere bei der Verarbeitung von Signalen. Wir werden uns jedoch hauptsächlich mit der Anwendung bei der inversen Laplace-Transformation beschäftigen.

Laplace-Rücktransformation

Die inverse Laplace-Transformation ist ein Pfadintegral in der komplexen Ebene,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} F(s) \, \mathrm{d}s \,,$$

für hinreichend grosses c. Für unsere Anwendungen werden wir diese Formel, die als *Bromwich-Integral* bekannt ist, jedoch nicht verwenden, sondern wir werden uns auf bekannte Laplace-Transformierte konzentrieren und sie rückwärts lesen.

Das zugrundeliegende Ergebnis ist als *Eindeutigkeitssatz von Lerch* bekannt, der besagt, dass die *Laplace-Transformation injektiv ist*. Das bedeutet, dass, wenn f und g zwei verschiedene Funktionen sind (verschieden auf einer Menge mit positivem Lebesgue-Mass), sich ihre Laplace-Transformierten unterscheiden.

Mit anderen Worten: Wenn F eine Laplace-Rücktransformation besitzt, dann ist $f = \mathcal{L}^{-1}F$ eindeutig bestimmt.

Insbesondere bedeutet das, dass wir das Doetsch-Symbol umkehren und $\mathcal{L}f \bullet\!\!-\!\!\circ\, f$ schreiben können.

Zum Beispiel können wir schreiben

$$\frac{1}{s^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\, t\,, \quad \text{da wir bereits wissen} \quad t \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s^2}\,.$$

Wenn wir also mit einem $f \in E$ beginnen und dann $\mathcal{L}f$ berechnen, erhalten wir f mit $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}f = f$ zurück.

Beispiel 4.30. Gegeben sei $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$. In diesem Beispiel wollen wir die Funktion f finden. Wir wissen bereits, dass

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \text{ und } \mathcal{L}(\sin(t))(s) = \frac{1}{s^2+1}, \text{ wir haben also}$$

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}(1)(s) \cdot \mathcal{L}(\sin(t))(s).$$

Wendet man Proposition 4.29 an, erhält man

$$\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}(1 * \sin(t))(s)\,.$$

Wir berechnen also

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}(1 * \sin(t))(t) = 1 * \sin(t) = \int_0^t 1 \cdot \sin(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= -\cos(u)\Big|_0^t = 1 - \cos(t)\,.$$

Proposition 4.31. Sei die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}f$ von f gegeben, dann haben wir die folgenden Korrespondenzen der Grenzwerte,

- $\lim_{t\downarrow 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}f(s)$,
- $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\downarrow 0} \big(s\mathcal{L}f(s)\big)$, wenn $\mathcal{L}f$ keine Singularitäten in $\mathfrak{R}\, s \geq 0$ ausser bei $s = 0$ hat.

Übung 4.32. Finden Sie einen kurzen Beweis von Proposition 4.31 unter der Zusatzannahme, dass f differenzierbar ist und $f' \in E$ liegt.
Hinweis: Verwenden Sie die Ableitungseigenschaft (Lemma 4.15) und die Tatsache, dass $\lim_{\mathfrak{R}s\to\infty} \mathcal{L}f(s) = 0$ für alle $f \in E$.

Beispiel 4.33. Wir berechnen die Grenzwerte der Funktion f wenn $t \to 0$ und $t \to \infty$, gegeben, dass wir $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2+4}$ kennen.

Wir benutzen Proposition 4.31 und berechnen direkt

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}f(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s^2+4} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2+4} = 0.$$

Erklären Sie die letzte Gleichheit im ersten Ausdruck für $s \in \mathbb{C}$.

Laplace-Transformation periodischer Funktionen

Für den nächsten Teil benötigen wir ein Hilfsergebnis.

Lemma 4.34. *(Geometrische Reihen)* Eine geometrische Reihe konvergiert, wenn $|q| < 1$, und nimmt folgenden Wert an,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst für $N \in \mathbb{N}$ die Summe $\sum_{n=0}^{N} q^n$ und multiplizieren sie mit $1-q$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{n=0}^{N} q^n &= \sum_{n=0}^{N} q^n - \sum_{n=1}^{N+1} q^n = 1 + \cancel{\sum_{n=1}^{N} q^n} - \cancel{\sum_{n=1}^{N} q^n} - q^{N+1} \\ &= 1 - q^{N+1}\,.\end{aligned}$$

Solche Summen werden *Teleskopsummen* genannt, da sie nur eine Erweiterung von $1 - q^{N+1}$ mit Nullen $(q - q) + \ldots + (q^N - q^N)$ darstellen. Wenn wir nach der Summe auflösen, erhalten wir also

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} .$$

Da $|q| < 1$ gilt, ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ und somit gilt,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{N} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} ,$$

was die Behauptung beweist. $\square$

Übung 4.35. Sei $|q| < 1$. Berechnen Sie den Wert von $\sum_{n=0}^{\infty}(-q)^n$, indem Sie ein ähnliches Verfahren wie oben anwenden (Sie müssen im Wesentlichen nur eine Sache ändern).

Satz 4.36. *(Laplace-Transformation periodischer Funktionen)* Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit Periode $P > 0$. Dann gilt für alle $\Re s > 0$

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{1 - e^{-sP}} \int_0^P e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.9}$$

Beweis. Zunächst schreiben wir die Definition der Laplace-Transformation auf. Dann teilen wir das Integral in Intervalle der Länge P und verwenden die Periodizität von f, genauer gesagt, wir verwenden Bemerkung 0.15 für $n \in \mathbb{N}$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int_{nP}^{(n+1)P} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^P e^{-s(t+nP)} f(t+nP)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^P e^{-st} e^{-snP} f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\sum_{n=0}^\infty e^{-snP}\right)\left(\int_0^P e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\sum_{n=0}^\infty e^{-snP} = \sum_{n=0}^\infty \left(e^{-sP}\right)^n$ eine geometrische Reihe. Mit $s = x + iy$ gilt $|e^{-sP}| = |e^{-(x+iy)P}| = |e^{-xP}| < 1$, da $\Re s = x > 0$. Mit Lemma 4.34 erhalten wir $\sum_{n=0}^\infty e^{-snP} = \frac{1}{1-e^{-sP}}$ und damit folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel 4.37. Betrachten Sie die Rechteckschwingung aus Beispiel 0.27

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } \lfloor 2x \rfloor \bmod 2 = 0\,, \\ 1 & \text{else.} \end{cases}$$

Da f periodisch mit Periode 1 ist, erhalten wir mithilfe von Satz 4.36

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-e^{-s}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-st}\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-st}\,\mathrm{d}t \right) \\ &= -\frac{1}{s}\frac{1}{(1-e^{-s})} \left(e^{-st}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - e^{-st}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right) \\ &= -\frac{1}{s}\frac{1}{(1-e^{-s})} \left(e^{-\frac{s}{2}} - 1 - e^{-s} + e^{-\frac{s}{2}} \right) = \frac{1 - 2e^{-\frac{s}{2}} + e^{-s}}{s(1-e^{-s})}\,. \end{aligned}$$

Übung 4.38. Wir haben die Laplace-Transformierte des Sinus nun mehrfach berechnet. Berechnen Sie die Transformierte noch einmal mithilfe von Satz 4.36.

Anwendung der Laplace-Transformation auf gewöhnliche Differentialgleichungen

Die Laplace-Transformation kann zur Lösung von homogenen und inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichungen oder Systemen solcher Gleichungen verwendet werden. Um das Verfahren zu verstehen, betrachten wir eine Reihe von Beispielen.

Angenommen, wir haben eine lineare Differentialgleichung (oder genauer ein Anfangswertproblem) der Form

$$\begin{aligned} x'(t) + ax(t) &= \vartheta(t) \\ x(0) &= x_0\,, \end{aligned}$$

wobei $a, x_0 \in \mathbb{R}$ und $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\vartheta \in E$. Wir wissen, dass $\mathcal{L}x'(s) = s\mathcal{L}x(s) - x(0)$. Wir können also die Laplace-Transformation auf beide Seiten der Differentialgleichung anwenden, die Gleichung lösen und dann zurücktransformieren.

Wir gehen wie folgt vor.

1. Wir wenden die Laplace-Transformation auf beide Seiten der Differentialgleichung an. Unter Verwendung der Linearität und der Eigenschaft in Lemma 4.15 können wir schreiben

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\vartheta(s) = \mathcal{L}\{x' + ax\}(s) &= \mathcal{L}\{x'\}(s) + a\mathcal{L}x(s) \\ &= s\mathcal{L}x(s) - x(0) + a\mathcal{L}x(s) = (s+a)\mathcal{L}x(s) - x_0\,.\end{aligned}$$

2. Wir können also nach $\mathcal{L}x(s)$ auflösen und erhalten

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{\mathcal{L}\vartheta(s) + x_0}{s+a}\,, \quad a \neq s\,.$$

3. Schliesslich können wir die Inverse $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}x\}(t)$ berechnen, normalerweise mit Hilfe von Proposition 4.29.

Beispiel 4.39. Wir sind an der Lösung des folgenden Anfangswertproblems interessiert,

$$x'(t) + 2x(t) = 2t - 4\,,$$
$$x(0) = 1\,.$$

Wir folgen nun den oben beschriebenen Schritten:

1. Zunächst wenden wir die Laplace-Transformation auf beide Teile der Gleichung an und verwenden die Linearität. Dies zusammen mit Übung 4.5 führt zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x' + 2x\} = \mathcal{L}(2t-4) &\iff \mathcal{L}\{x'\} + 2\mathcal{L}x = 2\mathcal{L}(t) - 4\mathcal{L}(1)\\ &\iff s\mathcal{L}x(s) - x(0) + 2\mathcal{L}x(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s}.\end{aligned}$$

2. Nun lösen wir für $s \neq 0, 2$ nach $\mathcal{L}x$ auf,

$$(s+2)\mathcal{L}x(s) - 1 = \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s} \iff \mathcal{L}x(s) = \frac{2}{s^2(s+2)} - \frac{4}{s(s+2)} + \frac{1}{s+2}.$$

3. Schliesslich verwenden wir Übung 4.5, Proposition 4.12 und Proposition 4.29, um die Rücktransformierte zu erhalten,

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+2)}\right) - 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) \\ &= 2(t * e^{-2t})(t) - 4(1 * e^{-2t})(t) + e^{-2t} \\ &= 2\int_0^t (t-\tau)e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau - 4\int_0^t 1 \cdot e^{-2\tau}\mathrm{d}\tau + e^{-2t} \\ &= t + \frac{e^{-2t}-1}{2} + 2(e^{-2t}-1) + e^{-2t} = t + \frac{7e^{-2t}-5}{2}. \end{aligned}$$

Wir können sogar Differentialgleichungen höherer Ordnung mit einem ähnlichen Verfahren lösen. Wir das allgemeine Ergebnis mit Hilfe der allgemeinen Ableitungseigenschaft in Proposition 4.18 her.

Satz 4.40. Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $\{a_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{R}$ und $\{c_k\}_{k=0}^{n-1} \subset \mathbb{R}$ zwei Mengen von Konstanten, und sei $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\vartheta \in E$ eine Funktion mit der Laplace-Transformierten $\mathcal{L}\vartheta$. Wir betrachten die folgende (in)homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung n

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)} = \vartheta(t),$$

$$x^{(k)}(0) = c_k, \text{ für } k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Wenn $\sum_{k=0}^n a_k s^k \neq 0$, dann ist für $t \geq 0$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathcal{L}\vartheta(s) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_k s^{k-j} c_{j-1}}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}\right)(t)$$

eine Lösung.

Beweis. Analog zum oben beschriebenen Verfahren folgen wir den drei Schritten.

Zunächst wenden wir die Laplace-Transformation $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der Differentialgleichung an und verwenden dann Linearität und Proposition 4.18,

$$\mathcal{L}\{\vartheta\}(s) = \mathcal{L}\left\{\textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)}\right\}(s) = a_0 \mathcal{L}x(s) + \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{L}\{x^{(k)}\}(s)$$

$$= a_0 \mathcal{L}x(s) + \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k \left(s^k \mathcal{L}x(s) - \sum_{j=1}^{k} s^{k-j} x^{(j-1)}(0)\right)$$

$$= \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k s^k \mathcal{L}x(s) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_k s^{k-j} c_{j-1} \,.$$

Nun können wir diese Gleichung nach $\mathcal{L}f$ auflösen und erhalten

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{\mathcal{L}\vartheta(s) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_k s^{k-j} c_{j-1}}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} \,. \tag{4.10}$$

Schliesslich folgt der Satz durch Anwendung der Rücktransformation auf beide Seiten. □

Bemerken Sie, dass, wenn $x^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt, Gleichung (4.10) die folgende Form annimmt,

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{\mathcal{L}\vartheta(s)}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} \, .$$

In Beispiel 4.39 mussten wir die Laplace-Rücktransformation von Produkten wie $\frac{1}{s}\frac{1}{(s+c)}$ berechnen, so wie in Satz 4.40 beschrieben. In diesem Fall haben wir Proposition 4.29 verwendet und die entsprechenden Faltungen in Schritt 3 berechnet. In Beispiel 4.42 werden wir einen weiteren Trick sehen, der angewandt werden kann.

Erinnern Sie sich hierzu an die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen, d.h. Brüche, deren Zähler und Nenner Polynome sind. Es handelt sich gewissermassen um das umgekehrte Verfahren der Suche nach einem gemeinsamen Nenner bei der Addition mehrerer Brüche.

Lemma 4.41. *(Partialbruchzerlegung über $\mathbb{R}$)* Jede rationale Funktion $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit m verschiedenen reellen Polen x_k der Ordnung p_k und n verschiedenen (bis auf komplexen Konjugation) komplexen Polen z_k der Ordnung q_k kann eindeutig dargestellt werden als

$$R(x) = P(x) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{p_k} \frac{a_{k\ell}}{(x - x_k)^\ell} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{q_k} \frac{b_{k\ell}x + c_{k\ell}}{(x - z_k)^\ell (x - \bar{z}_k)^\ell},$$

wobei P ein Polynom ist und alle $a_{k\ell}, b_{k\ell}, c_{k\ell} \in \mathbb{R}$.

Betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 4.42. Wir wollen eine Lösung der folgenden Differentialgleichung finden,

$$x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 10\,,$$
$$x'(0) = x(0) = 0\,.$$

Wir verwenden Satz 4.40 mit $x'(0) = x(0) = 0$ und erhalten für $s \neq 0, -1, -4$ die Form

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{10\mathcal{L}(1)}{4 + 5s + s^2} = \frac{10}{s(4 + 5s + s^2)} = \frac{10}{s(s+1)(s+4)}\,. \tag{4.11}$$

Wir kennen die Rücktransformierte dieses Ausdrucks nicht, nur der einzelnen Brüche $\frac{1}{s}$, $\frac{1}{s+1}$ und $\frac{1}{s+4}$. Zum Glück gibt es die Partialbruchzerlegung.

Mit Lemma 4.41 können wir diese rationale Funktion in eine Summe von Brüchen zerlegen,

$$\frac{10}{s(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4}\,, \tag{4.12}$$

wobei die Konstanten A, B und C durch Koeffizientenvergleich bestimmt werden müssen.

Multipliziert man nun beide Seiten mit $s(s+1)(s+4)$, so erhält man

$$\begin{aligned} 10 &= A(s+1)(s+4) + Bs(s+4) + Cs(s+1) \\ &= (A+B+C)s^2 + (5A+4B+C)s + 4A\,. \end{aligned}$$

Da auf der linken Seite nur 10 steht, müssen die Koeffizienten wie folgt gewählt werden,

$$A+B+C=0, \quad 5A+4B+C=0, \quad \text{and} \quad 4A=10.$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem und erhalten
$A = \frac{10}{4}, B = -\frac{10}{3}, C = \frac{10}{12}$, und somit

$$\mathcal{L}x(s) = 10\Big(\frac{1}{4s} - \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{12(s+4)}\Big).$$

Mit dieser Form sind wir vertraut, da wir wissen, dass $1 \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^{-1}$. Unter Verwendung des Dämpfungssatzes (Proposition 4.12) berechnen wir

$$x(t) = 10\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{-4t}\Big).$$

Anstatt also mit der Faltung zu arbeiten, um die Rücktransformierte zu finden, zerlegen wir den Bruch in eine Summe von "einfacheren" Brüchen und nutzen die Linearität von $\mathcal{L}^{-1}$.

Betrachten wir nun ein Beispiel, bei dem die rationale Funktion nur komplexe Wurzeln hat.

Beispiel 4.43. Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen $x'(0) = x(0) = 0$,

$$2x''(t) + 4x(t) = \cos(3t)\,.$$

Unter Verwendung von Satz 4.40 berechnen wir

$$\mathcal{L}x(s) = \frac{\mathcal{L}(\cos(3t))(s)}{4+2s^2} = \frac{s}{s^2+9} \cdot \frac{1}{4+2s^2}\,.$$

Natürlich wissen wir bereits, dass $\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+9})(t) = \cos(3t)$, und wir sehen, dass $\frac{1}{4+2s^2}$ eine gewisse Verbindung zum Sinus hat (in der Tat berechnen wir mithilfe des Ähnlichkeitssatzes (Proposition 4.8)
$(2\sqrt{2})^{-1}\sin(\sqrt{2}t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (2s^2+4)^{-1}$).

Wir haben nun zwei Möglichkeiten, weiterzumachen. Wir könnten die Faltung der beiden berechnen, wie in Proposition 4.29 beschrieben. Dies scheint jedoch mühsam zu sein. Also zerlegen wir diesen Bruch in eine Summe von Brüchen.

Wir bemerken, dass sowohl s^2+9 als auch $4+2s^2$ keine reellen Nullstellen besitzen, da $s^2+9=(s-3i)(s+3i)$ und $2s^2+4=2(s-i\sqrt{2})(s+i\sqrt{2})$. Aus Lemma 4.41 wissen wir, dass wir den Bruch wie folgt ausdrücken können,

$$\frac{s}{(s^2+9)(4+2s^2)} = \frac{A+Bs}{s^2+9} + \frac{C+Ds}{2s^2+4}.$$

Nun gehen wir wie in Beispiel 4.42 vor und erhalten $A = 0$, $B = -\frac{1}{14}$, $C = 0$, und $D = \frac{1}{7}$, sodass

$$\frac{s}{(s^2+9)(4+2s^2)} = \frac{1}{14}\left(\frac{s}{s^2+2} - \frac{s}{s^2+9}\right).$$

Die Rücktransformierten der einzelnen Terme kennen wir schon (aus Übung 4.5) und berechnen die Lösung unter Verwendung der Linearität,

$$x(t) = \frac{1}{14}\left(\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3t)\right).$$

Dieses Verfahren ist in der Regel schneller als die Verwendung von Faltungen. Allerdings müssen wir uns merken, welche Form die Partialbruchzerlegung hat.

Ein Hinweis: wenn wir Nullstellen in $\mathbb{C}$ zulassen, bleiben die Zähler konstant. In diesem Fall würden wir wie folgt zerlegen

$$\frac{s}{2(s^2+9)(2+s^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{s-3i} + \frac{B}{s+3i} + \frac{C}{s-\sqrt{2}i} + \frac{D}{s+\sqrt{2}i}\right).$$

Vergleicht man die Koeffizienten, so erhält man $A = B = -\frac{1}{14}$ und $C = D = \frac{1}{14}$. Durch Einsetzen und Rücktransformation erhalten wir

$$x(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{14}\left(e^{i\sqrt{2}t} + e^{-i\sqrt{2}t} - e^{i3t} - e^{i3t}\right) = \frac{1}{14}\Big(\cos(\sqrt{2}t) - \cos(3t)\Big),$$

wie erwartet.

Es ist in gewisser Weise ein Kompromiss. Der Koeffizientenvergleich im komplexen Fall kann von Hand länger dauern als der im realen Fall. Sie können jedoch sicher sein, dass die Zähler Konstanten sind und dass Sie die richtige Form verwenden.

Ausserdem ist es wohl einfacher, sich die Korrespondenz $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$ als die Korrespondenzen $\cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+a^2}$ und $\sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2}$ zu merken.

Wir schliessen diesen Abschnitt mit zwei Übungen ab.

Übung 4.44. Finden Sie anhand der oben beschriebenen Schritte eine Lösung für die folgende lineare Differentialgleichung erster Ordnung,

$$x'(t) + x(t) = e^t \text{ mit } x(0) = e^1 = e\,.$$

Sie sollten $x(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t} + 2e^{1-t})$ erhalten.

Übung 4.45. Erklären Sie, warum der “Laplace Weg” keine grosse Hilfe bei der folgenden *nicht-linearen* Differentialgleichung erster Ordnung ist,

$$x'(t) + (x(t))^2 = 0 \text{ mit } x(0) = 1\,.$$

Können Sie trotzdem eine Lösung finden? Vielleicht funktioniert $x(t) = \frac{1}{1+t}$? Aber wie kommt man darauf?