Mathematik III

Kapitel 5: Partielle Differentialgleichungen

Prof. Dr. Erich Walter Farkas
http://www.math.ethz.ch/~farkas
HS 2021

ETH zürich

Ein grosser Dank geht an meinen Doktoranden Alexander Smirnow, der dieses Skript mitgestaltet und übersetzt hat. Des Weiteren bedanken wir uns bei Philipp Zimmermann für hilfreiche Kommentare und Verbesserungsvorschläge.

Trotz unserer Bemühungen, das Skript fehlerfrei zu halten, schleichen sich doch ab und an Fehler ein. Es ist immer eine grosse Hilfe und wir freuen uns, wenn Fehler gemeldet werden, sodass wir diese schnell beheben können.

Bitte senden Sie Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge an Alexander Smirnow (alexander.smirnow@bf.uzh.ch).

Partielle Differentialgleichungen - Einführung

Wir haben bereits *gewöhnliche Differentialgleichungen (GDGL, englisch: ODE)* gesehen. Sie bestehen aus einer Funktion, ihren Ableitungen und *einer unabhängigen Variablen*.

Bemerkung 5.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine stetige Funktion. Dann ist

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

eine *gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung.*

Partielle Differentialgleichungen hingegen stellen Beziehungen zwischen partiellen Ableitungen einer mehrdimensionaler Funktionen her.

Wir führen zuerst einige Notationen ein. Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Es gibt viele Schreibweisen für partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \partial_{x_k} u = u_{x_k} = \partial_k u = u_k\,, \quad k \in \{1, \dots n\}\,.$$

Wir werden meistens die Schreibweise $\partial_{x_k} u$ verwenden, als Kompromiss zwischen präzise und wenig Schreibarbeit.

Des Weiteren definieren wir

$$\nabla u(x) = \Big(\partial_{x_1} u(x), \quad \dots \quad , \partial_{x_n} u(x)\Big)^{\mathsf{T}} \quad \text{und} \quad \Delta u(x) = \sum_{k=1} \partial_{x_k x_k}(x)\,.$$

Für einen *Multiindex* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definieren wir $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ und

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{sowie} \quad D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\}\,.$$

Definition 5.2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine *partielle Differentialgleichung k-ter Ordnung*, $k \in \mathbb{N}$, ist eine Gleichung der Form

$$F(x, u, Du, D^2u, \ldots, D^k u) = 0\,,$$

wobei $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n^k} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist.

Unser Ziel ist es, k-mal stetig differenzierbare Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{R}$ zu finden, die diese Gleichung punktweise erfüllen.

Bemerkung 5.3. Der Differentialoperator ∇ wird als *Nabla* (im Englischen auch *del*) ausgesprochen und $\nabla u = Du$ ist der *Gradient* von u. Der *Laplace-Operator* Δ ist der reguläre Grossbuchstabe Delta.

Beispiel 5.4. Beispiele für partielle Differentialgleichungen sind

1. $uu_x + u_y = 0$ auf $\mathbb{R}^2$,
2. $|\nabla u|^2 = 1$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,
3. $\Delta u = u_x$ auf $\mathbb{R}^2$,
4. $x^2 u_{xyy} = y + \sin(u_y)$ auf $\mathbb{R}^2$.

Wie Sie sich vorstellen können, ist es nicht einfach, Lösungen zu finden. Im Folgenden werden wir uns Beispiele ansehen und Wege zur Lösung einiger partieller Differentialgleichungen finden.

Übung 5.5. Zeigen Sie, dass die Funktion u gegeben durch $u(x, y) = \frac{x}{1+y}$ eine Lösung der ersten PDE von Beispiel 5.4 ist. Was ist der Definitionsbereich von u? Können Sie andere Lösungen finden, indem Sie geschickt eine Konstante in u einfügen?

Wir können PDEs klassifizieren anhand

- ihrer Ordnung,
- ihrer Linearitätseigenschaft (linear oder nichtlinear),
- ihrer Homogenitätseigenschaft (homogen oder inhomogen).

Beispiel 5.6. In Beispiel 5.4

- sind die erste und zweite PDE von der Ordnung 1, die dritte von der Ordnung 2 und die letzte von der Ordnung 3,
- ist die dritte PDE linear, während die anderen nichtlinear sind,
- sind die erste und dritte PDE homogen, während die zweite und vierte inhomogen sind.

Für den Spezialfall linearer PDEs zweiter Ordnung unterscheiden wir (wie bei den quadratischen Formen) zwischen

- *elliptischen* PDEs, wie zum Beispiel der *Laplace-Gleichung*,
- *parabolischen* PDEs, wie zum Beispiel der *Wärmeleitungsgleichung*, und
- *hyperbolischen* PDEs wie zum Beispiel der *Wellengleichung*.

Analog zu ODEs ist die Summe der Lösungen einer linearen homogenen PDE ebenfalls eine Lösung. Dies wird als *Superpositionsprinzip* bezeichnet.

Genauer, sei L ein linearer Differentialoperator der Form

$$L = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)}(x)\partial_{x_k} + \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k,\ell}^{(2)}(x)\partial_{x_k x_\ell} + \dots ,$$

dann gilt

$$L[u_j] = 0,\ j \in \{1,2\} \ \text{ impliziert } \ L[c_1 u_1 + c_2 u_2] = 0,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Übung 5.7. Der Differentialoperator $L = \partial_{xx} + \partial_{yy} - \partial_x$ entspricht einer der PDEs in Beispiel 5.4. Welche ist es?

In Anwendungen suchen wir oft nach Lösungen für eine PDE unter bestimmten Anfangs- und Randwerten. Ein solches Anfangs-Randwert-Problem könnte wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2 \\ u(x,0) &= 0 \\ u(x,1) &= 0 \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= \sin^2(\pi y)\,. \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu ODEs sind die Randbedingungen von PDEs Funktionen auf Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit "kleinerer Dimension".

In diesem Beispiel ist die Funktion $u|_{\partial\Omega} =: f$ auf dem Rand $\partial\Omega = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$ gegeben, eine eindimensionale Menge (Kurve) im $\mathbb{R}^2$.

In dieser Vorlesung werden wir hauptsächlich lineare PDEs bis zur zweiten Ordnung diskutieren. Wichtige Beispiele sind

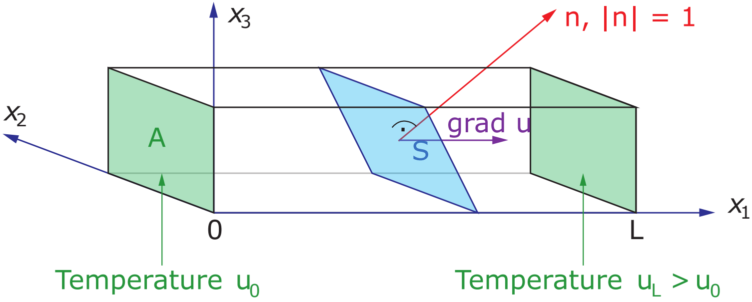
- *Laplace-Gleichung*: $\Delta u(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k x_k} u = 0$, elektrostatisches Potential ohne Ladungen oder Gravitationspotential ohne Massen,
- *Poisson-Gleichung*: $\Delta u(x) = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k x_k} u = f$, elektrostatisches Potential mit Ladungsdichte f oder Gravitationspotential mit Massendichte f,
- *Wärmeleitungsgleichung / Diffusionsgleichung*: $\partial_t u(x,t) - a\Delta u(x,t) = 0$, mit Temperaturleitfähigkeit $a > 0$.
- *Wellengleichung*: $\frac{1}{c^2}\partial_{tt} u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0$, wobei $c > 0$ die Phasengeschwindigkeit der Welle ist,
- *Schrödingergleichung*: $(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x))u(x,t) = i\hbar\partial_t u(x,t)$, wobei $\hbar$ das *reduzierte Plancksche Wirkungsquantum* oder *Planck-Konstante* ist, $m > 0$ die Masse des Teilchens, und V ein Potential ist.

Wärmeleitungsgleichung / Diffusionsgleichung

Sei $u(x,t)$ die Temperatur (oder die Dichte des Diffusionsmaterials) zum Zeitpunkt $t \geq 0$ und am Ort x innerhalb eines Mediums $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Wie fliesst nun die Wärme durch unser Medium?

Modell. Wir richten die x_1-Achse in Richtung ∇u aus.



Die Wärmemenge, die sich pro Zeiteinheit durch den Stab der Länge L von rechts nach links bewegt, ist proportional zur Querschnittfläche A und zur Temperaturdifferenz $u_L - u_0$, und ist invers proportional zu L.

Wir können dies durch den folgenden Quotienten beschreiben,

$$\frac{dW}{dt} = k\frac{u_L - u_0}{L}A\,.$$

Die Konstante k ist die *Wärmeleitfähigkeit* des Materials. Die Richtung des Wärmestroms wird durch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik beschrieben.

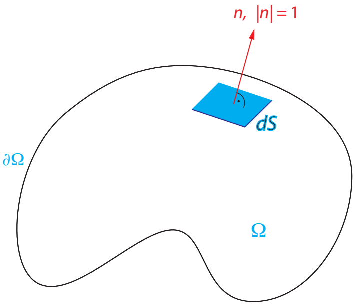
Wir stellen uns nun eine geneigte Fläche S vor. Für (sehr kleine) L approximiert der Quotient der Differenzen die partielle Ableitung von u nach x_1, daher erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = k\nabla u \cdot nS\,.$$

Dies ist das Negativ der Wärmemenge, die sich durch S in Richtung n bewegt.

Im Allgemeinen ist der Wärmestrom durch $\partial\Omega$ nach aussen gegeben durch

$$\phi(\partial\Omega) = -\int_{\partial\Omega} k\nabla u \cdot n\,\mathrm{d}S\,.$$



Die Wärmeenergie pro Masseneinheit ist proportional zur Temperatur. Daher ist die Menge der thermischen Energie in Ω gegeben durch

$$W(\Omega) = \int_\Omega c u \rho \,\mathrm{d}V \,,$$

wobei c die *spezifische Wärmekapazität* pro Masseneinheit des Materials und ρ die *Dichte* ist.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(\Omega)}{\mathrm{d}t} &= \int_\Omega c\frac{\partial u}{\partial t}\rho\,\mathrm{d}V = -\phi(\partial\Omega) = \\ &= \int_{\partial\Omega} k\nabla u\cdot n\,\mathrm{d}S \overset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega \operatorname{div}(k\nabla u)\mathrm{d}V\,.\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Ω und daher müssen die blauen Integranden gleich sein:

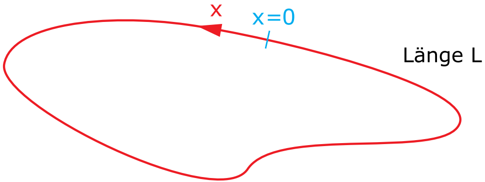
$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k\nabla u)\,.$$

Wenn k konstant ist, erhalten wir mit $D := \frac{k}{c\rho} > 0$ die Wärmeleitgleichung (bzw. die Diffusionsgleichung),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u\,.$$

PDEs lösen

Beispiel 5.8. *(Wärmeleitgleichung in einem geschlossenen Draht)* Stellen Sie sich einen Draht der Länge L vor. Wir messen die Position x auf dem Draht als den Abstand zu einem beliebigen Bezugspunkt $x = 0$.



Zu Beginn wird die eine Hälfte des Drahtes in warmes Wasser mit der Temperatur 1 getaucht, der Rest hat die Temperatur 0. Bei $t = 0$ nehmen wir den Draht aus dem warmen Wasser. Wir wollen nun die resultierende Wärmeverteilung wissen.

Wir müssen also Folgendes lösen

$$
\begin{aligned}
&(PDE) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\
&(AB) \qquad u(x,0) = u_0(x) \;:= \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in [0, \frac{L}{2}[\\ 0 & \text{wenn } x \in [\frac{L}{2}, L[\end{cases} \\
&(RB) \qquad u(x+L,t) = u(x,t) && \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0
\end{aligned}
$$

Ansatz: Wir suchen nach Lösungen der Form

$$u(x,t) = X(x)T(t)\,.$$

- Setzt man diesen Ausdruck in die PDE ein, erhält man

$$\dot{T}X = DX''T\,.$$

- Teilt man nun beide Seiten durch DXT, erhält man

$$\frac{1}{D}\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{5.1}$$

  Wir haben es geschafft, die Variablen x und t zu trennen.

Aus dieser Form geht hervor, dass, wenn man zuerst x und dann t fixiert, beide Seiten von Gleichung (5.1) gleich einer Konstanten κ sein müssen.

Dies bedeutet, dass die folgenden ODEs gelten müssen,

$$\dot{T} = \kappa DT\,, \tag{5.2}$$

$$X'' = \kappa X\,. \tag{5.3}$$

- Für $\kappa \geq 0$ hat Gleichung (5.3) nur eine periodische Lösung, $X \equiv 0$.
- Für $\kappa := -\omega^2 < 0$ hat Gleichung (5.3) die periodische Lösung

$$X(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\,.$$

- Wir erhalten die Periode L genau dann, wenn $\omega = \omega_n := \frac{2\pi n}{L}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Dies bedeutet, dass alle L-periodischen Lösungen von Gleichung (5.3) gegeben sind durch

$$X_n(x) = A_n\cos(\omega_n x) + B_n\sin(\omega_n x)\,.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir die Lösungen für Gleichung (5.2) für $n \in \mathbb{N}_0$ als

$$T_n(t) = \exp(-D\omega_n^2 t)\,.$$

Die Lösungen der (PDE) in Abhängigkeit von (RB) sind also die Funktionen

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)\,T_n(t) \\ &= (A_n\cos(\omega_n x) + B_n\sin(\omega_n x))\exp(-D\omega_n^2 t)\,. \end{aligned}$$

Wir nennen sie *Fundamentallösungen*.

Wir bemerken, dass

- (PDE) linear und homogen ist, und somit
- alle Linearkombinationen der Fundamentallösungen auch Lösungen sind. Die Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right) \exp\left(-D\frac{4\pi^2 n^2}{L^2}t \right)$$

  für beliebige A_n, B_n, falls konvergent, ist eine Lösung von (PDE) unter der Bedingung (RB).

Idee: Wir wählen die Koeffizienten A_n, B_n so, dass (AB) erfüllt ist. Dies bedeutet

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right) \overset{!}{=} u_0(x)\,.$$

Dies gilt aber nur, wenn A_n, B_n die Fourierkoeffizienten von u_0 sind:

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_n = 0 \text{ für } n \geq 1\,,$$
$$B_n = \frac{2}{n\pi} \text{ wenn } n \text{ ungerade ist}, \quad B_n = 0 \text{ wenn } n \text{ gerade ist.}$$

Setzt man diese Koeffizienten ein, erhält man schliesslich

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\Big(\frac{2\pi n}{L} x\Big) \exp\Big(-D\frac{4\pi^2 n^2}{L^2} t\Big)\,.$$

Bemerkung: Wir sehen, dass $u(x,t)$ mit $t \to \infty$ gegen die stationäre (d.h. zeitunabhängige) Lösung von (PDE) und (RB) konvergiert,

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L u_0(x)\mathrm{d}x\,.$$

A-priori Aussagen über die Lösung

Auch ohne eine explizite Formel können wir einige Informationen über die Lösung herleiten:

- Integriert man die PDE bezüglich x von 0 bis L, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L u\,\mathrm{d}x = \int_0^L u_{xx}\mathrm{d}x = 0$$

  Das bedeutet, dass die Menge an Wärmeenergie im Draht über die Zeit konstant ist,

$$\int_0^L u(x,t)\,dx \text{ ist konstant},$$

  was plausibel ist, da wir weder Energie hinzufügen noch abführen.

- Multipliziert man die PDE mit u und integriert dann bezüglich x von 0 bis L, so erhält man

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L u^2 \mathrm{d}x = \int_0^L u u_t \mathrm{d}x = \int_0^L u u_{xx} \mathrm{d}x \overset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} -\int_0^L u_x^2 \mathrm{d}x \leq 0\,.$$

  Das bedeutet, dass $\int_0^L u^2(x,t)dx$ monoton fallend in t ist.

- Multipliziert man die PDE mit $\ln u$ und integriert dann bezüglich x von 0 bis L, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L u \ln u \,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L (u\ln u - u)\,\mathrm{d}x = \int_0^L u_t \ln u \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^L u_{xx} \ln u \,\mathrm{d}x \overset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} -\int_0^L \frac{u_x^2}{u} \mathrm{d}x \leq 0\,.\end{aligned}$$

  Das bedeutet, dass die Entropie monoton steigend in t ist.

- Betrachten Sie $v(x,t) := u(x,t) - \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$ und fixieren Sie ein $t_0 > 0$. Nehmen Sie an, dass v ein Maximum bei x_0 annimmt,

$$v(x_0,t_0) = \max_{x\in[0,L]} v(x,t_0)\,.$$

Das bedeutet, dass

$$0 \geq v_{xx}(x_0,t_0) = u_{xx}(x_0,t_0) = u_t(x_0,t_0) = v_t(x_0,t_0) + \varepsilon$$

und somit $-\varepsilon \geq v_t(x_0,t_0)$. Da die Funktion v stetig ist, gilt

$$-\frac{\varepsilon}{2} \geq v_t(x,t)$$

in einer Umgebung von (x_0,t_0). Insbesondere gilt für $t < t_0$, die genügend nahe an t_0 liegen,

$$\max_{x\in[0,L]} v(x,t) \geq v(x_0,t) > v(x_0,t_0) = \max_{x\in[0,L]} v(x,t_0)\,.$$

Da wir ein beliebiges t_0 gewählt haben, folgern wir, dass $\max_{x\in[0,L]} v(x,t)$ streng monoton fallend in t ist.

Im Limes $\varepsilon \searrow 0$ erhalten wir

$$\max_{x \in [0,L]} u(x,t) \text{ ist monoton fallend in } t\,.$$

Dies ist ein Spezialfall des *Maximumprinzips* der Wärmeleitgleichung.

Verwenden wir $-u$, so erhalten wir das entsprechende *Minimumprinzip*,

$$\min_{x \in [0,L]} u(x,t) \text{ ist monoton steigend in } t\,.$$

Das Maximumprinzip besagt, dass sich die Wärme in diesem Beispiel nicht lokal ansammeln kann (ohne Wärmezufuhr). Ebenso ist nach dem Minimumprinzip eine lokale Abkühlung nicht möglich.

Dies steht im Gegensatz zu Wellenphänomenen, bei denen lokale Extrema aufgrund von Interferenzen möglich sind. Dieser Effekt wird zum Beispiel bei der Stosswellenlithotripsie (Zertrümmerung von Nierensteinen) ausgenutzt.

Laplace-Gleichung

Eine stationäre Lösung der Wärmeleitgleichung erfüllt die *Laplace-Gleichung*,

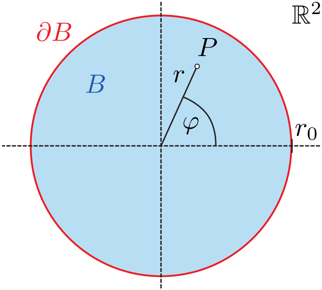
$$\Delta u = 0\,.$$

- Da $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$ gilt, ist eine Lösung u das Potential des divergenzfreien Vektorfeldes ∇u.
- Elektrostatische Felder und Gravitationsfelder sind von diesem Typ.
- Lösungen der Laplace-Gleichung werden *harmonische Funktionen* genannt.

Als Beispiel soll die stationäre Lösung der Wärmeleitgleichung auf einer offenen Kreisscheibe $B_{r_0}(0) \subset \mathbb{R}^2$ mit Radius $r_0 > 0$ und Mittelpunkt im Ursprung hergeleitet werden.

Zu diesem Zweck verwenden wir Polarkoordinaten. Man kann zeigen, dass die Laplace Gleichung in Polarkoordinaten folgende Form annimmt (Übung):

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0 \qquad \text{in } B_{r_0}(0)$$
$$u(r_0, \varphi) = \xi(\varphi) \text{ auf } \partial B_{r_0}(0)$$



Ansatz: Wir wählen $u(r, \varphi) = f(r)g(\varphi)$.

- Setzt man dies in die PDE ein, erhält man

$$f''g + \tfrac{1}{r}f'g + \tfrac{1}{r^2}f\ddot{g} = 0\,,$$

wobei $'$ die Ableitung nach r und $\dot{}$ die Ableitung nach φ bezeichnet.

- Multipliziert man beide Seiten mit $\frac{r^2}{fg}$, erhält man

$$\frac{1}{f}(r^2 f'' + rf') = -\frac{\ddot{g}}{g} =: \omega^2\,.$$

- Da die linke Seite eine Funktion von r und die rechte Seite eine Funktion von φ ist, müssen beide gleich einer Konstante ω^2 sein. Das Vorzeichen dieser Konstante haben wir bereits festgelegt.

- Wir müssen also zwei ODEs lösen,

$$\ddot{g} = -\omega^2 g \quad \text{und} \quad r^2 f'' + rf' - \omega^2 f = 0\,.$$

▷ Die Lösungen der ersten ODE sind

$$g(\varphi) = A\cos(\omega\varphi) + B\sin(\omega\varphi)\,.$$

Da wir nach 2π-periodischen Lösungen suchen, benötigen wir $\omega = \omega_n := n \in \mathbb{N}_0$, also

$$g_n(\varphi) = A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)\,.$$

▷ Die zweite ODE $r^2 f_n'' + r f_n' - n^2 f_n = 0$ ist eine *Euler'sche Gleichung*. Wir können sie mit dem Ansatz $f_n(r) = r^\alpha$ lösen.
Setzt man dies in die ODE ein, erhält man $\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0$, also $\alpha = \pm n$. Da wir keine Singularitäten (bei $r = 0$) haben wollen, können wir nur $\alpha = n$ wählen. Daher ist $f_n(r) = r^n$.

▷ Schliesslich kommen wir zu den Lösungen,

$$u_n(r,\varphi) = f_n(r)g_n(\varphi) = r^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))\,,\ n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Da die PDE linear und homogen ist, ist die folgende Reihe ebenfalls eine Lösung (falls konvergent),

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) .$$

Wie zuvor wollen wir die Koeffizienten A_n und B_n so wählen, dass die Randbedingungen erfüllt sind, d.h.,

$$\begin{aligned} u(r_0,\varphi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) \overset{!}{=} \xi(\varphi) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Fourierreihe von ξ steht (angenommen sie konvergiert). Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \frac{a_n}{r_0^n}, \quad B_n = \frac{b_n}{r_0^n} .$$

Die Lösung ist also gegeben durch

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^n}(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \,. \tag{5.4}$$

Beispiel 5.9. Wenn wir die Temperatur an der Grenzfläche wie folgt wählen

$$\xi(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq \varphi < \pi \\ 0 & \text{wenn } \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

erhalten wir

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{r^n}{n} \sin(n\varphi) \,.$$

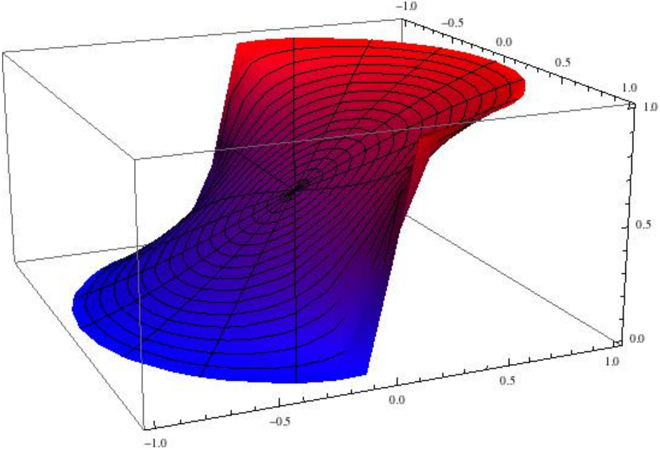


Abbildung 5.1: Die Temperatur der Scheibe wird durch dieses Diagramm veranschaulicht. Rot steht für warme, blau für kalte Bereiche.

Wenn wir mit Gleichung (5.4) fortfahren, setzen wir die expliziten Fourier-Koeffizienten von ξ ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
u(r,\varphi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^n}(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \xi(t)\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} \xi(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \cdot \cos(n\varphi) \right. \\
&\qquad \left. + \int_0^{2\pi} \xi(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \cdot \sin(n\varphi) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(t)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(nt)\cos(n\varphi)) + \sin(nt)\sin(n\varphi)) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \right] \mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
$$

Nach dem Additionstheorem für den Kosinus können wir die Terme in blau vereinfachen zu

$$
\cos(nt)\cos(n\varphi)) + \sin(nt)\sin(n\varphi) = \cos(n(t-\varphi)) = \mathrm{Re}\left(e^{i(t-\varphi)}\right)^n .
$$

Die Terme in den eckigen Klammern definieren eine geometrische Reihe und können vereinfacht werden als

$$\begin{aligned}\Big[\dots\Big] &= \mathrm{Re}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}e^{i(t-\varphi)}\right)^n\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(1+2\frac{\frac{r}{r_0}e^{i(t-\varphi)}}{1-\frac{r}{r_0}e^{i(t-\varphi)}}\right)\\ &= \mathrm{Re}\,\frac{r_0+re^{i(t-\varphi)}}{r_0-re^{i(t-\varphi)}} = \frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2rr_0\cos(t-\varphi)+r_0^2}\,.\end{aligned}$$

Setzt man dies wieder in die eckigen Klammern ein, erhält man

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(t)\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2rr_0\cos(t-\varphi)+r_0^2}\mathrm{d}t\,.$$

Für $r = 0$ erhalten wir die Spezialform

$$u(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t) \mathrm{d}t \, .$$

Wir formulieren dieses Ergebnis als Satz:

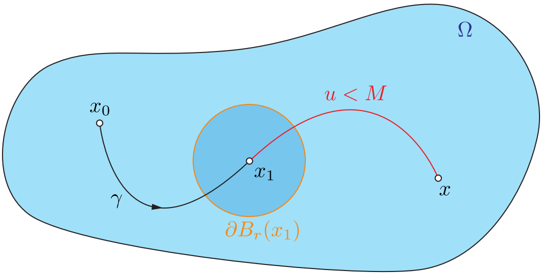
Satz 5.10. *(Mittelwerteigenschaft)* Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, d.h. u erfülle die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$. Sei $B_r(x)$ eine offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt x und Radius r, sodass ihr Abschluss vollständig in Ω enthalten ist. Der Wert $u(x)$ von u im Zentrum der Kreisscheibe ist gleich dem Mittelwert von u auf dem Rand der Kreisscheibe $\partial B_r(x)$.

Bemerkung: Die Mittelwerteigenschaft gilt in jeder Dimension.

Aus der Mittelwerteigenschaft lässt sich Folgendes ableiten:

Korollar 5.11. *(Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)* Nimmt eine harmonische Funktion u ein Maximum in einem inneren Punkt x_0 ihres zusammenhängenden Definitionsbereichs Ω an, dann ist u konstant.

Beweis (indirekt). Nehmen Sie an $M := u(x_0) > u(x)$ für $x \in \Omega$. Wir verbinden x_0 und x durch einen Pfad γ. Sei x_1 der letzte Punkt auf γ, an dem u den Wert M annimmt. Wir wählen $r > 0$ so, dass $B_r(x_1) \subseteq \Omega$.



Also ist $u \leq M$ auf $\partial B_r(x_1)$ und insbesondere ist $u < M$ in einer Umgebung des Punktes, an dem γ den Kreis $\partial B_r(x_1)$ schneidet. Nach unserer Annahme gilt $M = u(x_1)$, aber die Mittelwerteigenschaft besagt nun, dass $u(x_1) < M$ gelten muss. Widerspruch. Also $u(x_0) \not> u(x)$. Da x_0 ein beliebiger innerer Punkt war, muss u auf Ω konstant sein. □

Bemerkung. Das Maximumprinzip gilt auch in jeder Dimension. Wir erhalten das entsprechende Minimumprinzip, indem wir die Funktion $-u$ betrachten.

Interpretation: Eine stationäre Temperaturverteilung erreicht ihr Maximum immer auf dem Rand.