

Mathematik III

Kapitel 6: Fourier-Transformation

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

<http://www.math.ethz.ch/~farkas>

HS 2021

ETH zürich

6.1. Fourier-Transformation - Einführung

6.2. Eigenschaften der Fourier-Transformation

6.3. Fourier-Rücktransformation

6.4. Signalfilter mit der Fourier-Transformation

6.5. Anwendung der Fourier-Transformation auf partielle
Differentialgleichungen

Ein grosser Dank geht an meinen Doktoranden Alexander Smirnow, der dieses Skript mitgestaltet und übersetzt hat. Des Weiteren bedanken wir uns bei Philipp Zimmermann für hilfreiche Kommentare und Verbesserungsvorschläge.

Trotz unserer Bemühungen, das Skript fehlerfrei zu halten, schleichen sich doch ab und an Fehler ein. Es ist immer eine grosse Hilfe und wir freuen uns, wenn Fehler gemeldet werden, sodass wir diese schnell beheben können.

Bitte senden Sie Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge an Alexander Smirnow (alexander.smirnow@bf.uzh.ch).

Fourier-Transformation - Einführung

Die Motivation der Fourier-Transformation kommt aus den Fourierreihen. Wir haben im ersten Kapitel gelernt, dass viele periodische Funktionen mit Fourierreihen darstellbar sind.

In diesem Kapitel werden wir sehen, dass wir mithilfe der Fourier-Transformation sogar nicht periodische Signale in ein kontinuierliches Spektrum zerlegen können.

Diese Tatsache ist ein zentraler Bestandteil unserer digitalen Kommunikation:

- ▷ Ein grosser Teil der Kompression von digitalen Daten beruht auf der Fourier-Transformation. Zum Beispiel kann man ein Audio-Signal in den Frequenzraum transformieren, dort alle Frequenzen, die der Mensch nicht hört, entfernen und danach wieder zurücktransformieren.
- ▷ Die Fourier-Transformation wird bei der Signalanalyse eingesetzt, zum Beispiel bei der Erstellung von Bildern mit Magnetresonanztomographie.

Wir können eine P -periodische Funktion (die die nötigen Annahmen erfüllt), mit ihrer Fourierreihe darstellen,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in \frac{2\pi}{P} t}.$$

Wir summieren also Funktionen e^{ikx} , wobei

$k \in \{\dots, -\frac{4\pi}{P}, -\frac{2\pi}{P}, 0, \frac{2\pi}{P}, \frac{4\pi}{P}, \dots\}$. Je grösser P , desto kleiner wird der Abstand zwischen den Werten von k . Im Grenzwert $P \rightarrow \infty$ würden wir dann ein “Kontinuum von Werten” erhalten.

Da wir mit $P \rightarrow \infty$ nicht periodische Funktionen erhalten, fragen wir uns, ob wir nicht auch nicht periodische Funktionen mithilfe von Fourier darstellen können.

Sei also $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht periodische Funktion. Wir schränken f auf das Intervall $[-\frac{P}{2}, \frac{P}{2}]$ ein und entwickeln die Funktion in eine Fourierreihe,

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{P}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{P} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(s) e^{-in\frac{2\pi}{P}s} ds \right) e^{in\frac{2\pi}{P}t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{P}{2}}^{\frac{P}{2}} f(s) \left(\frac{2\pi}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\frac{2\pi}{P}(t-s)} \right) ds. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in den Klammern ist die Riemann-Summe des Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} d\omega$. Lassen wir nun $P \rightarrow \infty$, dann erhalten wir also zwei Integrale

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \right)}_{=\hat{f}(\omega)} e^{i\omega t} d\omega.$$

Wir erhalten also anstelle einer Summe ein Integral, und die Funktion $\hat{f}$ ist die “kontinuierliche Version” der Fourier-Koeffizienten c_n . Diese Funktion nennt man Fourier-Transformierte.

Des Weiteren sehen wir jetzt schon, dass es eine Inverse geben sollte, da wir mit Anwendung des äusseren Integrals wiederum unsere ursprüngliche Funktion f erhalten.

Welche Eigenschaften und Nutzen die Fourier-Transformation hat, werden wir in diesem Kapitel genauer betrachten.

In diesem Abschnitt betrachten wir hauptsächlich komplex-wertige, integrierbare Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t) \text{ mit } \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty.$$

Definition 6.1. Die *Fourier-Transformierte* (oder *Spektralfunktion*) einer integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.1)$$

Da f nach Annahme integrierbar ist und $|e^{-i\omega t}| = 1$ gilt, ist die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}f$ auf ganz $\mathbb{R}$ wohldefiniert, da für $\omega \in \mathbb{R}$

$$|\mathcal{F}f(\omega)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| |e^{-i\omega t}| dt < \infty.$$

Konventionell schreibt man die Fourier-Transformierte einer Funktion f als $\hat{f}$. Wir werden allerdings den Operator $\mathcal{F}$ verwenden und dabei auf ähnliche Notation wie bei der Laplace-Transformation zurückgreifen,

$$\mathcal{F}f(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega), \text{ für } \omega \in \mathbb{R}.$$

In der Literatur finden Sie auch die folgenden alternativen Definitionen:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \omega t} dt.$$

Je nachdem wie man die Fourier-Transformation anwenden möchte, können diese Normierungen gewisse Rechnungen vereinfachen.

Beispiel 6.2. Für $a > 0$ sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die *Indikatorfunktion* (auch *charakteristische Funktion*), definiert als

$$f(t) = 1_{[-a,a]}(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t \in [-a, a], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $\omega \neq 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} 1_{[-a,a]}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{t=-a}^{t=a} \\ &= \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{i\omega} = \frac{2}{\omega} \sin(a\omega). \end{aligned}$$

Da $\mathcal{F}f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist (Übung), gilt auch

$$\mathcal{F}f(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{F}f(\omega) = 2 \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(a\omega)}{\omega} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} 2a.$$

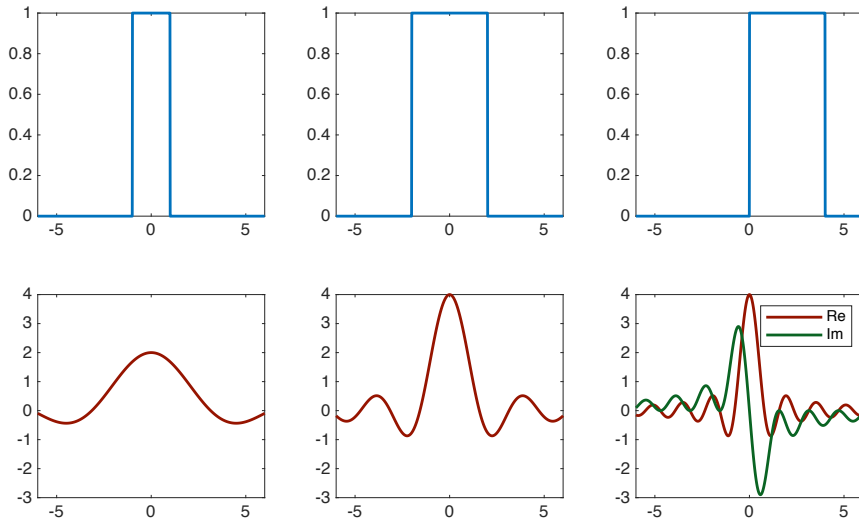


Abbildung 6.1: Obere Reihe: Graphen verschiedener Indikatorfunktionen.

Untere Reihe: Graphen der entsprechenden Fourier-Transformierten.

Von links nach rechts: $f_1(t) = 1_{[-1,1]}(t)$, $f_2(t) = 1_{[-2,2]}(t)$, $f_3(t) = 1_{[0,4]}(t)$.

Beispiel 6.3. Die Fourier-Transformierte der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

kann durch quadratische Ergänzung wie folgt berechnet werden

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\varphi(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t-i\omega)^2 - \frac{\omega^2}{2}} dt \\ &= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{-\frac{\omega^2}{2}},\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt einige Überlegungen zum komplexen Integral übersprungen wurden.

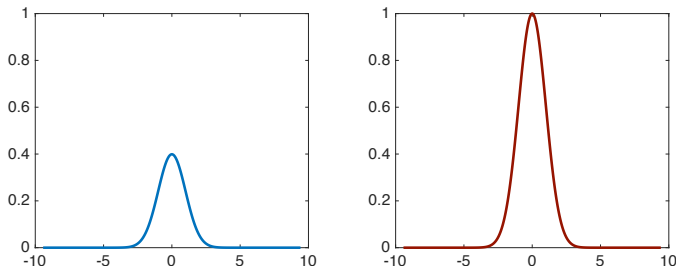


Abbildung 6.2: Links ist der Graph der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und rechts ist der Graph ihrer Fourier-Transformierten abgebildet.

Man beachte, dass die Fourier-Transformierte bis auf die Konstante $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ die Verteilungsfunktion φ wiedergibt, $\mathcal{F}\varphi(\omega) = \sqrt{2\pi}\varphi(\omega)$. Das bedeutet insbesondere, wenn wir die Fourier-Transformation als $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt$ definieren, dann ist φ ein Fixpunkt.

Bemerkung 6.4. In der Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es *charakteristische Funktionen*, die für eine Zufallsvariable X und ihre Dichtefunktion f_X definiert sind als

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) e^{itx} dx.$$

Können Sie argumentieren, dass diese Funktion im Wesentlichen die Fourier-Transformierte der entsprechenden Verteilungsfunktion ist?

Beispiel 6.5. Betrachten wir zuletzt noch die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(at).$$

Wir schreiben die Kosinusfunktion als $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ und können ähnlich wie zuvor die Fourier-Transformierte mit quadratischer Ergänzung berechnen,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\omega) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} (e^{-iat} + e^{iat}) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i(\omega+a)t} dt + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i(\omega-a)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t-i(\omega+a))^2 - \frac{1}{2}(\omega+a)^2} dt + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t-i(\omega-a))^2 - \frac{1}{2}(\omega-a)^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-\frac{1}{2}(\omega+a)^2} + e^{-\frac{1}{2}(\omega-a)^2}).\end{aligned}$$

Ähnlich wie zuvor wurden im letzten Schritt einige Überlegungen zum komplexen Integral ausgelassen.

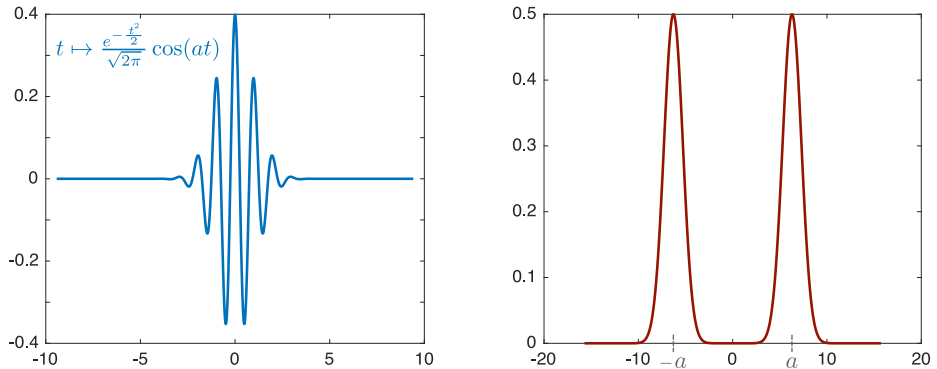


Abbildung 6.3: Links ist der Graph von $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(at)$ und rechts ist der Graph ihrer Fourier-Transformierten abgebildet.

Es ist auffällig, dass die Fourier-Transformierte gerade bei $-a$ und a ihre Maxima hat.

Eigenschaften der Fourier-Transformation

Im Folgenden leiten wir einige wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation her.

Proposition 6.6. (*Linearität*) Die Fourier-Transformation ist *komplex-linear*, das bedeutet für $a, b \in \mathbb{C}$ und integrierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Fourier-Transformierten $\mathcal{F}f$ und $\mathcal{F}g$ gilt

$$\mathcal{F}\{af + bg\} = a\mathcal{F}f + b\mathcal{F}g.$$

Beweis. Mit der Linearität des Integrals erhalten wir direkt für $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{af + bg\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} (af(t) + bg(t))e^{-i\omega t} dt \\ &= a \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt + b \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= a\mathcal{F}f(\omega) + b\mathcal{F}g(\omega).\end{aligned}$$

Somit ist die Fourier-Transformation linear.



Beispiel 6.7. Wir berechnen die Fourier-Transformierte der Dreiecksfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(t) = (1 - |t|)^+ := \max(1 - |t|, 0) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{wenn } |t| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir teilen zunächst das Integral auf,

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{-1}^1 (1 - |t|)e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt - \int_{-1}^1 |t|e^{-i\omega t} dt$$

und bemerken, dass $\int_{-1}^1 e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}1_{[-1,1]}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega)$. Somit müssen wir nur das zweite Integral lösen. Dieses teilen wir wiederum auf, um den Betrag loszuwerden,

$$\int_{-1}^1 |t|e^{-i\omega t} dt = \int_{-1}^0 -te^{-i\omega t} dt + \int_0^1 te^{-i\omega t} dt.$$

Mit partieller Integration erhalten wir nun für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b t e^{-i\omega t} dt = \left. \frac{t e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} dt = \left. \frac{t e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{t=a}^{t=b} - \left. \frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)^2} \right|_{t=a}^{t=b}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |t| e^{-i\omega t} dt &= - \left(-\frac{e^{i\omega}}{i\omega} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{e^{i\omega}}{\omega^2} \right) + \left(\frac{e^{-i\omega}}{-i\omega} + \frac{e^{-i\omega}}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i\omega} + \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega} - 2}{\omega^2} \\ &= \frac{2}{\omega} \sin(\omega) + \frac{2(\cos(\omega) - 1)}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir also

$$\mathcal{F}f(\omega) = \mathcal{F}1_{[-1,1]}(\omega) - \frac{2}{\omega} \sin(\omega) - \frac{2(\cos(\omega) - 1)}{\omega^2} = \frac{2(1 - \cos(\omega))}{\omega^2}.$$

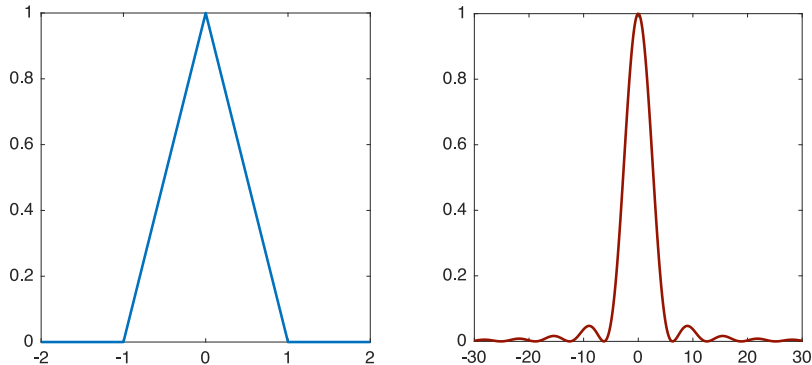


Abbildung 6.4: Links ist der Graph der Dreiecksfunktion und rechts der Graph ihrer Fourier-Transformierten abgebildet.

Wir werden später sehen, dass

$$\frac{2(1 - \cos(\omega))}{\omega^2} = \left(\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} \right)^2 = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Proposition 6.8. (*Ähnlichkeitssatz*) Sei $a > 0$ und sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion mit Fourier-Transformierten $\mathcal{F}f$. Dann gilt

$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right)(\omega) = a\mathcal{F}f(a\omega).$$

Beweis. Wir erhalten mit der Substitution $s = \frac{t}{a}$, $dt = a ds$ für $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right)(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-i\omega t} dt \\ &= a \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-i\omega a s} ds = a\mathcal{F}f(a\omega),\end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Beispiel 6.9. Betrachten wir erneut die Indikatorfunktion aus [Beispiel 6.2](#).

Für $a > 0$ haben wir berechnet, dass

$$\mathcal{F}(1_{[-a,a]}(t))(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(a\omega)$$

gilt. Somit erhalten wir mithilfe von [Proposition 6.8](#), dass für $b > 0$

$$\mathcal{F}(1_{[-a,a]}(\tfrac{a}{b}t))(\omega) = \tfrac{b}{a} \mathcal{F}1_{[-a,a]}(t)(\tfrac{b}{a}\omega) = \tfrac{b}{a} \frac{2}{\frac{b}{a}\omega} \sin(a \frac{b}{a}\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(b\omega),$$

wie erwartet.

Proposition 6.10. (*Zeitverschiebung*) Sei $h \in \mathbb{R}$ und sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion mit Fourier-Transformierten $\mathcal{F}f$, dann gilt

$$\mathcal{F}(f(t - h))(\omega) = e^{-ih\omega} \mathcal{F}f(\omega).$$

Beweis. Wir erhalten mit der Substitution $s = t - h$ direkt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t - h))(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t - h) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-i\omega(s+h)} ds \\ &= e^{-ih\omega} \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{-i\omega s} ds = e^{-ih\omega} \mathcal{F}f(\omega), \end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Beispiel 6.11. Wir haben in [Beispiel 6.2](#) gesehen, dass für $a > 0$ wir $\mathcal{F}(1_{[-a,a]}(t))(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(a\omega)$ erhalten.

Doch in [Abbildung 6.1](#) sehen wir, dass die Fourier-Transformierte von $1_{[0,4]}$ (nicht von der Form $1_{[-a,a]}$) auch einen imaginären Teil hat.

Mit [Proposition 6.10](#) können wir nun $\mathcal{F}1_{[0,4]}$ direkt aus $\mathcal{F}1_{[-a,a]}$ mit $a = 2$ berechnen,

$$\mathcal{F}1_{[0,4]}(\omega) = \mathcal{F}(1_{[-2,2]}(t-2))(\omega) = e^{-2i\omega} \frac{2}{\omega} \sin(2\omega).$$

Proposition 6.12. (Dämpfungssatz) Sei $\omega_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion mit Fourier-Transformierten $\mathcal{F}f$. Dann gilt

$$\mathcal{F}(e^{-i\omega_0 t} f(t))(\omega) = \mathcal{F}f(\omega + \omega_0).$$

Beweis. Wir erhalten direkt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{-i\omega_0 t} f(t))(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega_0 t} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt \\ &= \mathcal{F}f(\omega + \omega_0),\end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Proposition 6.13. (*Ableitung im Originalbereich*) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar mit Fourier-Transformierter $\mathcal{F}f$ und sei $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ihre integrierbare Ableitung, dann gilt

$$\mathcal{F}\{f'\}(\omega) = i\omega\mathcal{F}f(\omega).$$

Des Weiteren sei $f^{(n)}$ die n -te Ableitung von f . Wenn man an alle Ableitungen bis zur n -ten die gleichen Voraussetzungen stellt, dann gilt

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}\}(\omega) = (i\omega)^n\mathcal{F}f(\omega).$$

Beweis. Wir beweisen die allgemeine Aussage durch Induktion und zeigen im Induktionsanfang die erste Aussage. Sei also $n = 1$, dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\omega t} dt = f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} + i\omega \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \mathcal{F}f(\omega).\end{aligned}$$

Nehmen wir nun für $n \geq 2$ an, dass $\mathcal{F}\{f^{(n-1)}\}(\omega) = (i\omega)^{n-1} \mathcal{F}f(\omega)$ gilt. Dann erhalten wir mit einer ähnlichen Rechnung

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f^{(n)}\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f^{(n)}(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= f^{(n-1)}(t)e^{-i\omega t} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} + i\omega \int_{\mathbb{R}} f^{(n-1)}(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \mathcal{F}\{f^{(n-1)}\}(\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}f(\omega),\end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Übung 6.14. Argumentieren Sie, dass tatsächlich $f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = 0$ gelten muss, wenn $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < \infty$.

Proposition 6.13 ist eine sehr nützliche Eigenschaft der Fourier-Transformation, mithilfe derer wir einige partielle Differentialgleichungen lösen können.

Die Idee ist, dass wir (ähnlich wie bei der Laplace-Transformation) die Ableitungen der Ursprungsfunktion $f^{(n)}$ loswerden und durch simple Multiplikation mit $i\omega$ ersetzen können, $(i\omega)^n \mathcal{F}f$.

Beispiel 6.15. Wir wollen die Fourier-Transformation von $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t) = \frac{-t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ berechnen. Wir wissen schon, dass für die Standardnormalverteilungsdichte φ gilt,

$$\mathcal{F}\varphi(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\right)(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}},$$

und wir bemerken, dass

$$\varphi'(t) = f(t).$$

Mit [Proposition 6.13](#) erhalten wir also direkt

$$\mathcal{F}f(\omega) = i\omega \mathcal{F}\varphi(\omega) = i\omega e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

Proposition 6.16. (*Ableitung im Bildbereich*) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar mit Fourier-Transformierter $\mathcal{F}f$, dann gilt

$$(\mathcal{F}f)^{(n)} = \mathcal{F}((-it)^n f(t)).$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion. Sei $n = 1$, dann berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}f}{d\omega}(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} -it f(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}(-itf(t))(\omega). \end{aligned}$$

Für $n \geq 2$ nehmen wir an, dass $(\mathcal{F}f)^{(n-1)} = \mathcal{F}((-it)^{n-1}f(t))$ gelte. Eine ähnliche Berechnung ergibt

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f)^{(n)}(\omega) &= \frac{d(\mathcal{F}f)^{(n-1)}}{d\omega}(\omega) \stackrel{!A}{=} \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}((-it)^{n-1}f(t))(\omega) \\&= \frac{d}{d\omega} \int_{\mathbb{R}} (-it)^{n-1} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\mathbb{R}} (-it)^{n-1} f(t) \frac{d}{d\omega} e^{-i\omega t} dt \\&= \int_{\mathbb{R}} (-it)^n f(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}((-it)^n f(t))(\omega),\end{aligned}$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Beispiel 6.17. Wir suchen die Fourier-Transformierte der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(t) = t^2 1_{[-1,1]}(t)$. Laut [Proposition 6.16](#) gilt

$$\mathcal{F}(t^2 1_{[-1,1]}(t))(\omega) = -\mathcal{F}((-it)^2 1_{[-1,1]}(t))(\omega) = -\mathcal{F}(1_{[-1,1]}(t))^{(2)}(\omega).$$

Da wir aus [Beispiel 6.2](#) wissen, dass $\mathcal{F}(1_{[-1,1]}(t))(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega)$ gilt, müssen wir nur zwei mal ableiten und erhalten direkt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t^2 1_{[-1,1]}(t))(\omega) &= -\frac{d^2}{d\omega^2} \left(\frac{2}{\omega} \sin(\omega) \right) \\ &= \frac{2(\omega^2 - 2) \sin(\omega) + 4\omega \cos(\omega)}{\omega^3}. \end{aligned}$$

Proposition 6.18. (*Faltungssatz*) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zwei integrierbare Funktionen mit Fourier-Transformierten $\mathcal{F}f$ und $\mathcal{F}g$. Dann ist die Fourier-Transformierte der Faltung von f und g das Produkt der Fourier-Transformierten von f und g ,

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g.$$

Beweis. Für die Berechnung substituieren wir zunächst $s = t - \tau$,
 $ds = d\tau$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(s) e^{-i\omega(s+\tau)} d\tau ds.\end{aligned}$$

Nun vertauschen wir die Reihenfolge der Integrale und teilen sie auf (warum ist das möglich?) und erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f * g\}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\omega\tau} \left(\int_{\mathbb{R}} g(s) e^{-i\omega s} ds \right) d\tau \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) \left(\int_{\mathbb{R}} g(s) e^{-i\omega s} ds \right) \\ &= \mathcal{F}f(\omega) \mathcal{F}g(\omega),\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Übung 6.19. Berechnen Sie nochmals die Fourier-Transformierte der Dreiecksfunktion. Wenden Sie folgende Schritte an:

1. Zeigen Sie, dass die Faltung der Indikatorfunktion $1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ mit sich selbst die Dreiecksfunktion ergibt,

$$1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} * 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) = (1 - |t|)^+.$$

2. Verwenden Sie [Proposition 6.18](#) und [Beispiel 6.2](#), um die Fourier-Transformierte der Dreiecksfunktion zu berechnen.
3. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit [Beispiel 6.7](#).

Fourier-Rücktransformation

Wir können aus der Fourier-Transformierten die ursprüngliche Funktion erhalten.

Proposition 6.20. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar und sei $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ihre Fourier-Transformierte. Wenn auch $\mathcal{F}f$ integrierbar ist, dann gilt in allen Stetigkeitspunkten von f

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}f\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.2)$$

Beispiel 6.21. Wir berechnen die Originalfunktion der Fourier-Transformierten $\omega \mapsto \mathcal{F}f(\omega) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}(\omega+a)^2} + e^{-\frac{1}{2}(\omega-a)^2})$ aus Beispiel 6.5.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{2}(\omega+a)^2} + e^{-\frac{1}{2}(\omega-a)^2} \right) e^{i\omega t} d\omega \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{2}(w+a-it)^2 - iat - \frac{t^2}{2}} + e^{-\frac{1}{2}(w-a-it)^2 + iat - \frac{t^2}{2}} \right) dw \\&= \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2\pi} \left(\frac{e^{-iat}}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(w+a-it)^2} dw + \frac{e^{iat}}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(w-a-it)^2} dw \right) \\&= \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-iat} + e^{iat}}{2} \right) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \cos(at) .\end{aligned}$$

Übung 6.22. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}f\}(t) = 2\pi f(-t).$$

Schreiben Sie f dazu wie in [Gleichung \(6.2\)](#) und werten Sie f bei $-t$ aus.

Übung 6.23. Schauen Sie das Video von *3Blue1Brown* an, in dem Sie eine visuelle Interpretation der Fourier-Transformation erhalten:

<https://youtu.be/spUNpyF58BY>.

Signalfilter mit der Fourier-Transformation

Definition 6.24. Für ein $a > 0$ heisst eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *a-Band-beschränkt*, wenn $\mathcal{F}f(\omega) = 0$ für alle $|\omega| > a$.

Beispiel 6.25. Wir haben in [Beispiel 6.2](#) berechnet, dass $\mathcal{F}1_{[-a,a]}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(a\omega)$. Des Weiteren wissen Sie aus [Übung 6.22](#), dass

$$\mathcal{F}\left(\frac{2}{t} \sin(at)\right)(\omega) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}1_{[-a,a]}\}(\omega) = 2\pi 1_{[-a,a]}(-\omega) = 2\pi 1_{[-a,a]}(\omega).$$

Somit ist $t \mapsto \frac{\sin(at)}{t}$ eine a -Band-beschränkte Funktion.

Mithilfe der Indikatorfunktion $1_{[-a,a]}$ lässt sich nun ein sogenannter *Tiefpassfilter* bilden.

Sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und sei $\mathcal{F}f$ ihre Fourier-Transformierte. Wenn wir $\mathcal{F}f$ mit $1_{[-a,a]}$ multiplizieren, werden alle Frequenzen, die ausserhalb des Intervalls $[-a, a]$ liegen, entfernt.

Anschliessend lässt sich die resultierende Funktion zurücktransformieren, womit wir ein weniger verrauschtes Signal erhalten.

Übung 6.26. Zeigen Sie, dass wir das gleiche Resultat erhalten, wenn wir das ursprüngliche Signal mit der Funktion $t \mapsto \frac{\sin(at)}{t}$ falten.

Mithilfe der Fourier-Transformation können wir also die störenden hohen Frequenzen aus einem verrauschten Audiosignal entfernen und somit gezielt die Qualität des Signals verbessern. Betrachten Sie [Abbildung 6.5](#) und [Abbildung 6.6](#).

Auf ähnliche Weise können wir auch einen Hochpassfilter definieren. Hierzu subtrahieren wir einfach das Signal, das wir durch den Tiefpassfilter erhalten, von dem ursprünglichen Signal,

$$f - \mathcal{F}^{-1}\{1_{[-a,a]} \cdot \mathcal{F}f\}.$$

Betrachten Sie [Abbildung 6.7](#).

Mithilfe der Fourier-Transformation lassen sich auch digitale Dateien komprimieren. Wir können gezielt Frequenzen, zum Beispiel solche, die der Mensch nicht hört, entfernen, wodurch die Datei viel kleiner werden kann.

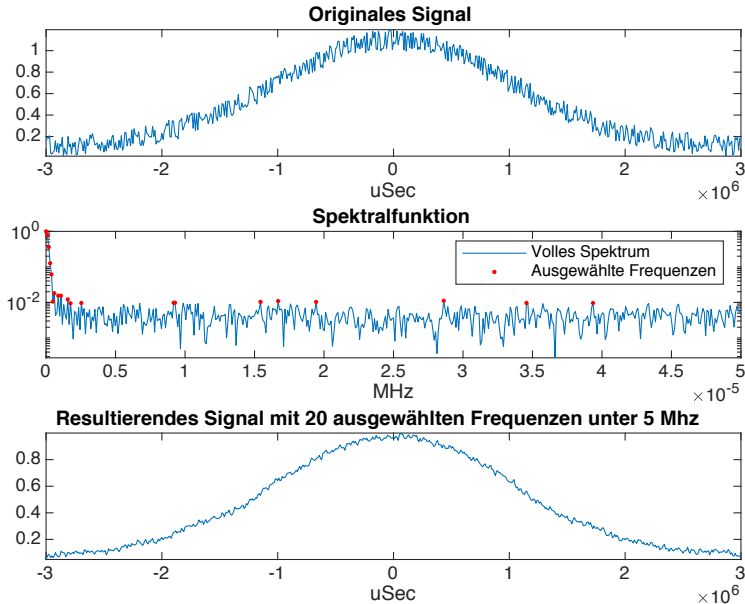


Abbildung 6.5: Ein verrauschtes Signal wird einem Tiefpassfilter unterworfen.

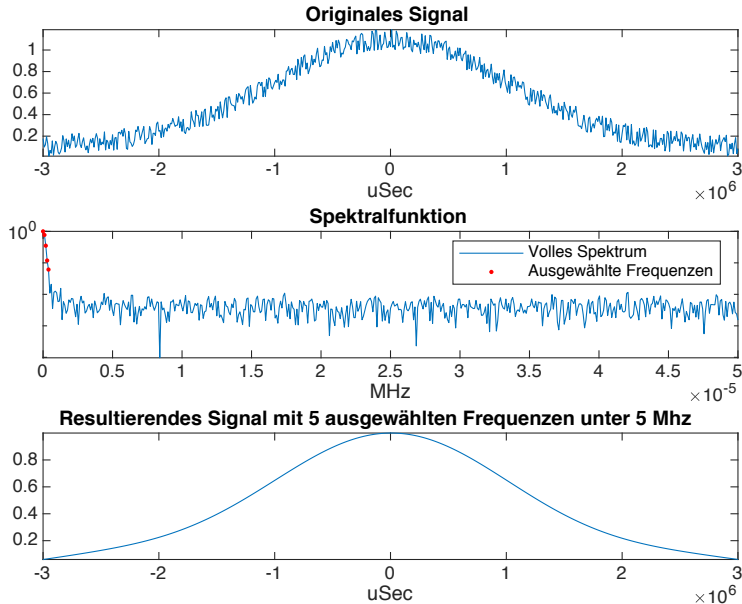


Abbildung 6.6: Ein verrauschtes Signal wird einem Tiefpassfilter unterworfen.

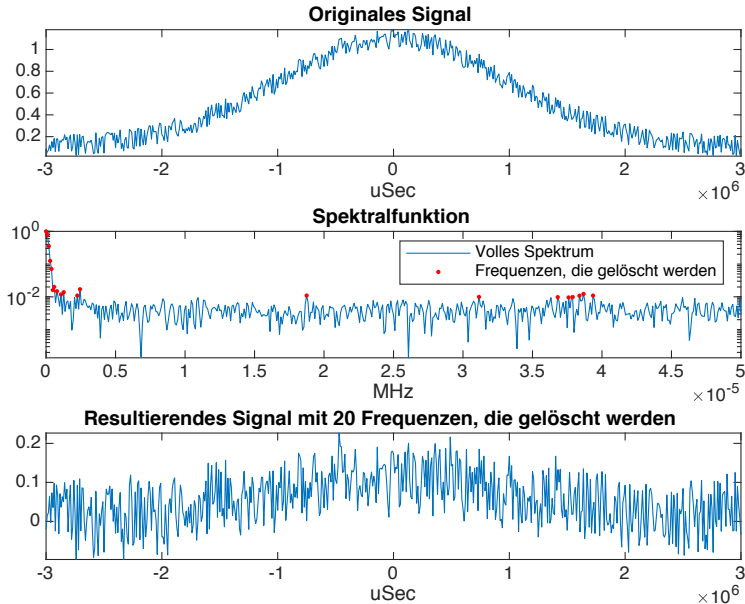


Abbildung 6.7: Ein verrauschtes Signal wird einem Hochpassfilter unterworfen.

Anwendung der Fourier-Transformation auf partielle Differentialgleichungen

Betrachten wir die *Wellengleichung* in einer Dimension für eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{c^2} \partial_{tt} u(x, t) - \partial_{xx} u(x, t) = 0, \quad (6.3)$$

wobei $c > 0$ die Phasengeschwindigkeit der Welle ist. Wir legen noch die folgenden Anfangsbedingungen fest,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ \partial_t u(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}$$

Bemerkung 6.27. Man nennt den Differentialoperator $\frac{1}{c^2} \partial_{tt} - \partial_{xx}$ *d'Alembert-Operator* und verwendet das Symbol $\square$. Somit können wir Gleichung (6.3) wie folgt schreiben,

$$\square u = 0.$$

Um diese PDE zu lösen, wenden wir die Fourier-Transformation bezüglich x auf [Gleichung \(6.3\)](#) an und fassen t dabei als einen Parameter auf. Mithilfe von [Proposition 6.13](#) erhalten wir die Fourier-transformierte Wellengleichung für $\omega, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \mathcal{F}\{\partial_{tt}u\}(\omega, t) - \mathcal{F}\{\partial_{xx}u\}(\omega, t) &= 0 \\ \iff \frac{1}{c^2} \mathcal{F}\{\partial_{tt}u\}(\omega, t) - (i\omega)^2 \mathcal{F}\{u\}(\omega, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}u(\omega, 0) &= \mathcal{F}\varphi(\omega), \\ \mathcal{F}\{\partial_t u\}(\omega, 0) &= \mathcal{F}\psi(\omega). \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass

$$\mathcal{F}\{\partial_{tt}u\} = \int_{\mathbb{R}} \partial_{tt}u(x, t)e^{-i\omega x}dx = \partial_{tt} \int_{\mathbb{R}} u(x, t)e^{-i\omega x}dx = \partial_{tt}\mathcal{F}u.$$

Wenn wir ω nun festhalten, ist [Gleichung \(6.4\)](#) eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in t ,

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathcal{F}u(\omega, t) + \omega^2\mathcal{F}u(\omega, t) = 0$$

mit charakteristischem Polynom

$$\lambda^2 + c^2\omega^2 = 0.$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen $\lambda = ic\omega$ und $\bar{\lambda} = -ic\omega$ und somit folgt mit [Satz 2.15](#), dass $\sin(c\omega t)$ und $\cos(c\omega t)$ linear unabhängige Lösungen sind.

Zusammenfassend sind unsere Lösungen also von der Form

$$\mathcal{F}u(\omega, t) = A(\omega) \sin(c\omega t) + B(\omega) \cos(c\omega t).$$

Aus den Anfangsbedingungen erhalten wir nun A und B als

$$\mathcal{F}u(\omega, 0) = B(\omega) \stackrel{!}{=} \mathcal{F}\varphi(\omega) \quad \text{und}$$

$$\partial_t \mathcal{F}u(\omega, 0) = c\omega A(\omega) \stackrel{!}{=} \mathcal{F}\psi(\omega).$$

Somit ist die Fourier-Transformierte der Lösung gegeben durch

$$\mathcal{F}u(\omega, t) = \frac{\mathcal{F}\psi(\omega)}{c\omega} \sin(c\omega t) + \mathcal{F}\varphi(\omega) \cos(c\omega t).$$

Mit der Fourier-Rücktransformation aus [Gleichung \(6.2\)](#) erhalten wir also die Lösung,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathcal{F}\psi(\omega)}{c\omega} \sin(c\omega t) + \mathcal{F}\varphi(\omega) \cos(c\omega t) \right) e^{i\omega x} d\omega.$$

Um dieses Integral zu lösen, schreiben wir $\cos(c\omega t) = \frac{e^{ic\omega t} + e^{-ic\omega t}}{2}$ sowie $\frac{\sin(c\omega t)}{c\omega} = \int_0^t \cos(c\omega s) ds$. Für den zweiten Teil des Integrals erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\varphi(\omega) \frac{e^{ic\omega t} + e^{-ic\omega t}}{2} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\varphi(\omega) e^{i\omega(x+ct)} d\omega + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\varphi(\omega) e^{i\omega(x-ct)} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2} (\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)). \end{aligned}$$

Für den ersten Teil des Integrals berechnen wir

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\psi(\omega) \left(\int_0^t \cos(c\omega s) ds \right) e^{i\omega x} d\omega \\
 & \stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\psi(\omega) (e^{ic\omega s} + e^{-ic\omega s}) e^{i\omega x} d\omega ds \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^t \psi(x + cs) + \psi(x - cs) ds.
 \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen $\bar{s} = x \pm cs$, $d\bar{s} = \pm c ds$ erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^t \psi(x + cs) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \psi(x - cs) ds \\
 & = \frac{1}{2c} \int_x^{x+ct} \psi(\bar{s}) d\bar{s} - \frac{1}{2c} \int_x^{x-ct} \psi(\bar{s}) d\bar{s} \\
 & = \frac{1}{2c} \left(\int_x^{x+ct} \psi(\bar{s}) d\bar{s} + \int_{x-ct}^x \psi(\bar{s}) d\bar{s} \right) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\bar{s}) d\bar{s}.
 \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung ist somit gegeben durch

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y) \, dy.$$

Das ist die Formel von d'Alembert.

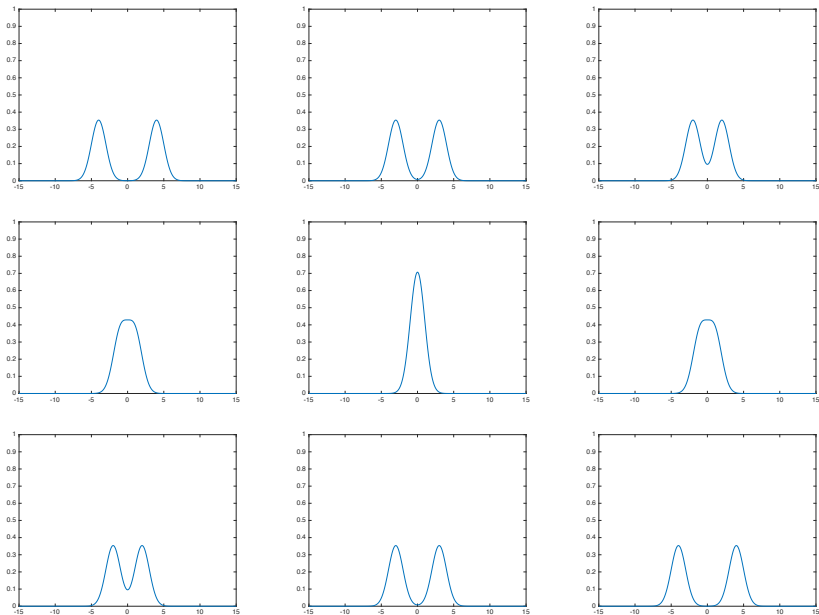


Abbildung 6.8: Zwei gegeneinander laufende Wellen.

In [Abbildung 6.8](#) sehen Sie zwei gegeneinander laufende Wellen an neun verschiedenen Zeitpunkten. Wenn die Wellen aufeinander treffen, addieren sich die Wellen.

Diese Eigenschaft von Wellen wird zum Beispiel bei der extrakorporalen Stosswellenlithotripsie ausgenutzt, bei der ausserhalb des Körper erzeugte Stosswellen aus verschiedenen Richtungen auf einen Nierenstein gebündelt werden, sodass dieser zertrümmert werden kann.



Abbildung 6.9:
Nierensteinzertrümmerer HM1,
1980. Quelle: [Link](#)

Übung 6.28. Im folgenden Python code verwenden wir matplotlib, um Lösungen der Wellengleichung zu animieren. Spielen Sie ein wenig mit dem Code, wählen Sie andere Funktionen φ und ergänzen Sie das Integral von ψ .

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import animation

# Initialisierung figure, axis, ect.
fig = plt.figure()
ax = plt.axes(xlim=(-10, 10), ylim=(0, 0.5))
line, = ax.plot([], [], lw=2)

# Initialisierungsfunktion
def init():
    line.set_data([], [])
    return line,
```

```
# Definieren Sie hier Ihre ``Wellenfunktion``
def phi(x):
    return 1/np.sqrt(2*np.pi)*np.exp(-np.square(x)/2)

# Funktion, die animiert wird
def animate(t):
    c = 1
    x = np.linspace(-10,10,200)
    y = 0.5*(phi(x + c*t) + phi(x - c*t))
    line.set_data(x, y)
    return line,

# FuncAnimation (frames definiert das t in animate)
anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, init_func=init,
                               frames=np.linspace(-5,5,200), interval=20, blit=True)

plt.show()
```