

Mathematik III

Kapitel 0: Voraussetzungen

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

<http://www.math.ethz.ch/~farkas>

HS 2021

ETH zürich

0.1. Mengen und Quantoren

0.2. Folgen, Summen und Reihen

0.3. Funktionen und Graphen

- Periodische Funktionen
- Einseitige Grenzwerte und Unstetigkeitsstellen
- Gerade und ungerade Funktionen

0.4. Lineare Algebra

- Reelle Vektorräume
- Vektorräume und ihre Basen
- Determinanten
- Eigenvektoren, Eigenwerte und das charakteristische Polynom
- Diagonalisierbare Matrizen
- Matrixexponential

Ein grosser Dank geht an meinen Doktoranden Alexander Smirnow, der dieses Skript mitgestaltet und übersetzt hat.

Trotz unserer Bemühungen, das Skript fehlerfrei zu halten, schleichen sich doch ab und an Fehler ein. Es ist immer eine grosse Hilfe und wir freuen uns, wenn Fehler gemeldet werden, sodass wir diese schnell beheben können.

Bitte senden Sie Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge an Alexander Smirnow (alexander.smirnow@bf.uzh.ch).

Das erste Kapitel befasst sich mit mathematischen Objekten, (Rechen-)Regeln, Konventionen und “bekanntem” Ergebnissen. Den Grossteil dieser Themen haben Sie in der einen oder anderen Form gesehen und es sollte Ihnen bekannt sein.

Wenn Sie sich nicht mehr sicher sind, was Reihen oder Funktionen sind, oder wie man Grenzwerte, Determinanten oder Ähnliches berechnet, dann suchen Sie zuerst in diesem Kapitel.

Wikipedia ist oft ein guter Startpunkt für Definitionen, Beispiele und Sätze. Passende Literatur wäre zum Beispiel “*Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2: Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*” von Lothar Papula.

Mengen und Quantoren

In der Mathematik benutzen wir jegliche Symbole, mit denen wir gewisse Konzepte schön kurz, aber sehr präzise ausdrücken können. Oft kann man die Bedeutung nicht direkt vom Symbol ableiten und grundsätzlich ist man frei, eigene Notation zu “erfinden”. In diesem Fall ist es sehr wichtig, die eigene Notation auch *ordentlich einzuführen und zu erklären*.

Einige Symbole sind so stark mit einem bestimmten Gebrauch assoziiert, dass es nur zur Verwirrung kommt, würde man sie anderweitig verwenden. Zwei solcher Symbole sind die folgenden:

- ▷ Das Symbol \in bedeutet *“ist Element von”* oder kurz *“in”*.
So bedeutet $x \in \mathbb{R}$ also *“x ist ein Element der Menge \mathbb{R} ”* und wir sprechen es aus als *“x in \mathbb{R} ”*.
- ▷ Das Symbol \subset bedeutet *“ist Teilmenge von”*. Wenn wir also schreiben *“sei $A \subset \mathbb{R}$ ”*, dann meinen wir *“sei A eine Teilmenge der Menge aller reellen Zahlen”*. In diesem Fall nennen wir \mathbb{R} eine *Obermenge* von A .

Man verwendet auch das Symbol \subseteq für Teilmengen, die gleich der Obermenge sein können. Wenn wir explizit betonen wollen, dass es sich um eine *echte Teilmenge* handelt, also eine Menge die nicht gleich der Obermenge sein darf, dann benutzen wir das Symbol \subsetneq .

Diese Symbole lassen sich negieren. So schreiben wir \notin , wenn wir meinen “*ist kein Element von*”, und $\not\subset$ wenn wir ausdrücken wollen “*ist keine Teilmenge von*”.

Zum Beispiel ist die *imaginäre Einheit* i keine reelle Zahl, also $i \notin \mathbb{R}$, und als Erweiterung gilt auch, dass die Menge aller komplexen Zahlen keine Teilmenge der reellen Zahlen ist, also $\mathbb{C} \not\subset \mathbb{R}$.

Man kann auch anderweitig variieren. So passt es manchmal (eher bei handschriftlichen Notizen) die Zeichen umzudrehen: \ni , \supset . Dabei gilt $\mathbb{R} \ni x$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{R}$, und $\mathbb{R} \supset A$ genau dann, wenn $A \subset \mathbb{R}$.

Übung 0.1. Welche Aussagen sind richtig?

1. $\{1, 2, 3, \dots\} \in \mathbb{N}$.
2. $(e, \pi, \frac{1}{2})^T \in \mathbb{R}^3$.
3. $0 \notin \mathbb{N}$.
4. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.
5. Für $x \in [-2, 2]$ gilt $x^2 \in [0, 2]$.

In der Mathematik tauchen immer wieder ganz bestimmte Mengen auf. Diesen Mengen hat man darum ganz bestimmte Symbole zugeordnet.

In dieser Vorlesung benutzen wir folgende Konventionen:

- ▷ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bezeichnet die Menge aller *natürlichen Zahlen*.¹

Die Zahl 0 gehört hier nicht zu den natürlichen Zahlen. Wenn wir 0 hinzufügen, dann schreiben wir explizit

- ▷ $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, die *Vereinigung* von 0 mit den natürlichen Zahlen.²

¹Sie mögen sich wundern, was nach '3' kommt. Die korrekte Antwort ist 4, und dann 5. Nach jedem $n \in \mathbb{N}$ kommt $n + 1$, und diese Zahl ist wiederum in \mathbb{N} . Ein Mathematiker würde vielleicht noch nicht zufrieden sein, aber für uns soll das ausreichen.

²Geschweifte Klammern deuten an, dass wir 0 als eine Menge (mit einem Element 0) betrachten. Also $0 \in \mathbb{N}_0$, aber $\{0\} \subset \mathbb{N}_0$.

\mathbb{N} und \mathbb{N}_0 sind vor allem nützlich, wenn wir etwas zählen wollen. Eine Menge, die die “gleiche Grösse” wie \mathbb{N} hat, nennen wir *abzählbar unendlich*.³

Natürlich interessieren uns auch negative Zahlen. Eine naheliegende Erweiterung ist also, die natürlichen Zahlen auf die “negative Seite” zu spiegeln:

$$\triangleright \mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}_0 \cup -\mathbb{N} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

die Menge aller *ganzen Zahlen*.

Manchmal nennen wir \mathbb{N} die Menge aller *positiven ganzen Zahlen* und \mathbb{N}_0 die Menge aller *nicht-negativen ganzen Zahlen*. Im Allgemeinen, “positiv” bedeutet “strikt positiv” und “nicht-negativ” enthält die 0.

³Das bedeutet, es gibt eine *Bijektion* zwischen der Menge und \mathbb{N} . Dazu später mehr.

Das Symbol $-\mathbb{N}$ ist eine Abkürzung für die Menge $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Das bedeutet, wir multiplizieren jedes Element in \mathbb{N} mit -1 .

Allgemeiner definieren wir für eine Menge X und eine Konstante $c \in Y$ die Menge

$$cX = \{cx \mid x \in X\},$$

sofern die Produkte cx definiert sind.

Elemente aus \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 und \mathbb{Z} bezeichnen wir meistens mit den Buchstaben j, k, ℓ, n, m .

Manchmal, vor allem beim Programmieren, wird der Buchstabe i als Laufvariable aus \mathbb{N} verwendet. Wir werden das vermeiden, da für uns i die komplexe Einheit ist.

Die nächste Menge beinhaltet alle Brüche,

$$\triangleright \mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \text{ die Menge der } \textit{rationalen Zahlen}.$$

Wir benutzen oft die Buchstaben q, r für Elemente aus \mathbb{Q} .

Übung 0.2. Auf den ersten Blick scheint die Menge der rationalen Zahlen “grösser” zu sein als die Menge der natürlichen Zahlen. Tatsächlich ist \mathbb{Q} aber auch abzählbar unendlich. Überlegen Sie sich, wie man eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und \mathbb{Q} definieren könnte.

Tipp: Cantors erstes Diagonalargument.

Es ist gar nicht so leicht, die folgende Menge rigoros zu definieren. Für unsere Vorhaben geben wir uns mit der folgenden Definition zufrieden,

▷ $\mathbb{R} = \{\text{irrationale Zahlen}\} \cup \mathbb{Q}$, die Menge der *reellen Zahlen*.

Irrationale Zahlen sind Zahlen, die nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können. Zum Beispiel sind $\sqrt{2}$, π und e in \mathbb{R} aber nicht in \mathbb{Q} enthalten.

Beispiel 0.3. Wir zeigen, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass wir doch $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ als Bruch schreiben können. Wir nehmen weiterhin an, dass m und n teilerfremde ganze Zahlen sind, der Bruch also gekürzt ist.

Aus unserer Annahme folgt $2 = \frac{m^2}{n^2}$ und somit $2n^2 = m^2$. Da $2n^2$ eine gerade ganze Zahl ist, ist auch m^2 gerade und insbesondere auch m .

Somit lässt sich m schreiben als $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir erhalten also

$$2n^2 = m^2 = 4k^2 \quad \text{und somit} \quad n^2 = 2k^2.$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir, dass auch n^2 und somit n gerade sein muss. Somit sind sowohl m als auch n durch 2 teilbar. Dies ist aber ein Widerspruch zur Teilerfremdheit. Damit haben wir gezeigt, dass unsere Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ falsch ist und dass das Gegenteil gelten muss.

Da \mathbb{R} keine “Lücken” hat,⁴ können wir hier die Intervallnotation verwenden.

Intervalle sind spezielle Teilmengen von \mathbb{R} , die mithilfe der *Endpunkte* $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ dargestellt werden:

- ▷ $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ist ein *abgeschlossenes Intervall*,
- ▷ $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ist ein *offenes Intervall*.

Halboffene Intervalle $(a, b]$ (linksoffen) und $[a, b)$ (rechtsoffen) werden analog definiert. Des Weiteren benutzen wir folgende Notationen

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) \text{ und } \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty),$$

$$\mathbb{R}_{> 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, \infty) \text{ und so weiter.}$$

Für reelle Zahlen benutzen wir meistens die Buchstaben x, y, s, t .

⁴Stellen Sie sich vor, dass die überabzählbar unendlich vielen Lücken in \mathbb{Q} mit irrationalen Zahlen “gefüllt” wurden.

Die letzte Menge, die wir uns betrachten, ist die Menge der komplexen Zahlen. Diese erweitert die reellen Zahlen derart, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösbar wird. Hierfür führen wir die *imaginäre Einheit* $i = \sqrt{-1}$ ein und definieren

▷ $\mathbb{C} = \{x_1 + ix_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, die Menge der *komplexen Zahlen*.

Oft benutzen wir die Buchstaben z, w , um komplexe Zahlen darzustellen. Wie Sie vielleicht schon wissen, hilft es manchmal, sich \mathbb{C} als Produktraum $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ vorzustellen. Betrachten Sie [Abbildung 0.1](#) und erklären Sie, wieso das gerechtfertigt ist.

Der *Real-* und *Imaginärteil* einer komplexen Zahl $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ werden dargestellt als $\Re z = \operatorname{Re}(z) = x_1$ und $\Im z = \operatorname{Im}(z) = x_2$.

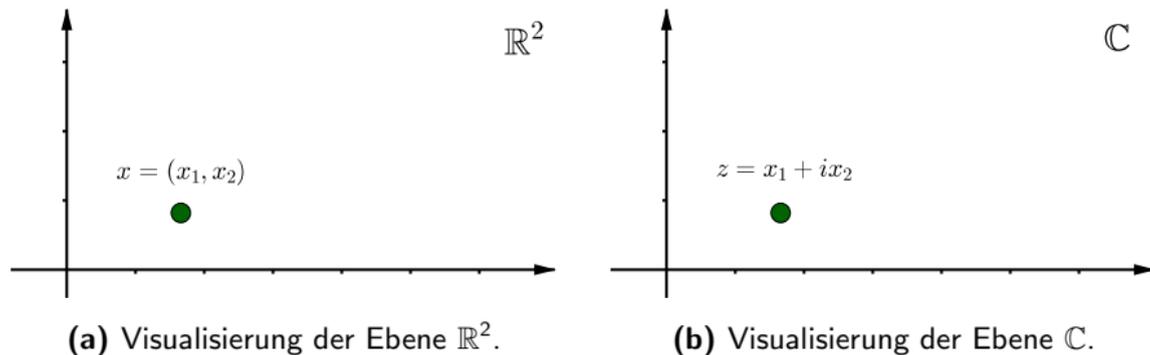


Abbildung 0.1: Visualisierung von \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} .

Wir beenden dieses Unterkapitel mit der Einführung sogenannter *Quantoren*. Diese Symbole erlauben uns, gewisse Aussagen stark abzukürzen. Dennoch sind diese Symbole *kein Ersatz* für klare, erklärende Sätze.

Sei $A(x)$ eine Aussage über ein $x \in \mathbb{R}$.

- ▷ Das Symbol \forall bedeutet *“für alle”*. Wenn wir also $\forall x \in \mathbb{R} : A(x)$ schreiben, meinen wir *“für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die Aussage $A(x)$ ”*.
- ▷ Das Symbol \exists bedeutet *“es existiert”*. Wir schreiben $\exists x \in \mathbb{R} : A(x)$ und sagen *“es existiert (mindestens ein) $x \in \mathbb{R}$, sodass die Aussage $A(x)$ gilt”*.
- ▷ Wir benutzen $\exists!$, wenn wir meinen *“es existiert genau ein”*.
- ▷ Das Symbol \nexists bedeutet *“es existiert kein”*. Somit bedeutet $\nexists x \in \mathbb{R} : A(x)$, dass *“kein $x \in \mathbb{R}$ existiert, sodass die Aussage $A(x)$ gilt”*.

Diese Symbole sind nützlich, um Gedanken schnell zu notieren. Man muss aber auf die richtige Reihenfolge achten. So ist im Allgemeinen $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : A(x, y)$ nicht gleich $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : A(x, y)$.

Beispiel 0.4. Zum Beispiel⁵, sei X die Menge aller ETH Studenten und sei Y die Menge aller Vorlesungen an der ETH. Für $x \in X$ und $y \in Y$ sei $A(x, y)$ die Aussage: "Student x ist interessiert an Vorlesung y ". Dann ist " $\forall x \in X \exists y \in Y : A(x, y)$ " (hoffentlich) wahr. Aber " $\exists y \in Y \forall x \in X : A(x, y)$ " ist (höchstwahrscheinlich) nicht wahr. Was meinen Sie?

⁵Aus "Analysis I und II (2016/2017)", Manfred Einsiedler, Andreas Wieser, Beispiel 1.8.

Folgen, Summen und Reihen

Eine Kollektion oder Familie von nummerierten Objekten nennt man *Folge* oder *Sequenz*. Es können beliebige Objekte sein: Zahlen, Vektoren, Funktionen, Buchstaben, Häuser an einer Strasse, Resultate verschiedener Münzwürfe und so weiter. Die *Länge* einer Folge ist die Anzahl der Elemente in der Folge und kann endlich oder unendlich sein.

Normalerweise verwenden wir \mathbb{N} (abzählbar unendlich) oder eine Teilmenge $\{1, \dots, N\} = \{n \in \mathbb{N} \mid N \in \mathbb{N}, n \leq N\} \subset \mathbb{N}$ (endlich), um eine Folge zu nummerieren.

Wir schreiben

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, um die Folge (a_1, a_2, a_3, \dots) zu bezeichnen,

wobei die Glieder a_n Zahlen, Vektoren und so weiter sein können.

Allgemeiner kann man eine *Indexmenge* I verwenden und $(a_n)_{n \in I}$ schreiben. Manchmal sieht man auch $(a_n)_{n=1}^N$, wenn die Indexmenge $\{1, \dots, N\} \subset \mathbb{N}$ ist.

Übung 0.5. Sie kennen vielleicht die Fibonacci-Folge,

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots).$$

Definieren Sie $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und finden Sie eine *Rekursionsrelation*, um die Fibonacci-Folge zu definieren. Anders ausgedrückt, definieren Sie ein beliebiges Glied a_n für $n \geq 3$ mit den vorhergehenden Gliedern der Folge. In diesem Fall brauchen Sie nur zwei vorhergehende Glieder.

Bemerken Sie, dass eine Folge mit Gliedern aus einer Menge X eine Teilmenge von X ist. Zum Beispiel ist die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilmenge von \mathbb{N} , da für alle Elemente gilt, $a_n \in \mathbb{N}$.

Wenn wir betonen wollen, dass die Folge als eine Teilmenge betrachtet werden soll, dann benutzen wir manchmal geschweifte Klammern, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$.

Natürlich kann man das nicht machen, wenn die Folge Objekte aus verschiedenen Mengen kombiniert. So wie man Äpfel und Orangen nicht vergleichen kann (ausser vielleicht, wenn man die Obermenge "Früchte" wählt).

Wenn wir Zahlenfolgen betrachten, dann können wir den Begriff eines Grenzwertes einführen. Wir konzentrieren uns im Folgenden auf reelle Zahlenfolgen.

Der *Grenzwert* oder *Limes* einer Folge ist eine Zahl, der die Folgenglieder “beliebig nahe” kommen, sodass in jeder Umgebung dieser Zahl fast alle Folgenglieder liegen.

Genauer ausgedrückt:

Definition 0.6. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn wir zu jedem beliebigen $\epsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass $|a_n - a| < \epsilon$, falls $n \geq N$.

Das bedeutet, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein Index N existiert, ab dem alle Folgenglieder in dem offenen Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ liegen, also der Abstand zu a kleiner als ϵ ist.

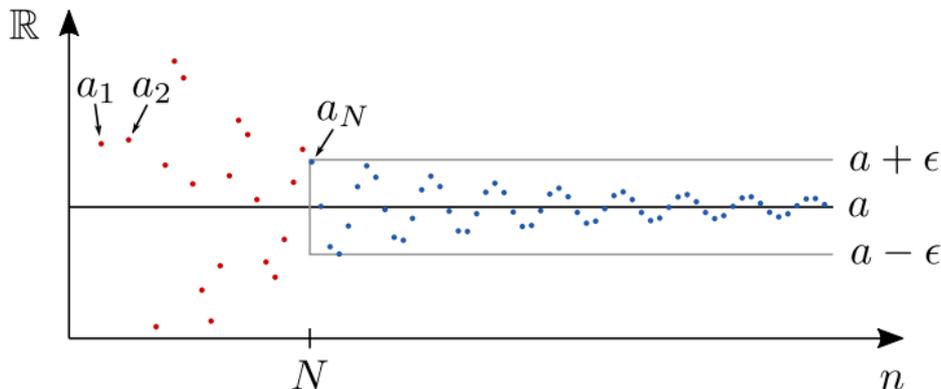


Abbildung 0.2: Visualisierung Grenzwert einer Zahlenfolge.

Übung 0.7. Bestimmen Sie, ob die folgenden Zahlenfolgen konvergieren, und wenn ja, bestimmen Sie den Limes.

1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$.
2. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{\sin(n)}{n}$.
3. $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = 1$ wenn n gerade ist und $c_n = e^{-n}$ wenn n ungerade ist.
4. $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \log(n)$.
5. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $e_n = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$, wobei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Fibonacci-Folge ist.

Wenn wir abzählbar viele Elemente summieren wollen, dann benutzen wir das Symbol \sum (ein grossgeschriebenes Sigma).

Die Addition von *endlich vielen* Elementen nennen wir *Summe* und wir benutzen oft Laufvariablen mit Werten aus $\{1, \dots, N\}$,

$$\sum_{n \in \{1, \dots, N\}} a_n = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_N.$$

Addition von *unendlich vielen* Elementen nennen wir *Reihe* und als Laufvariablen benutzen wir meistens eine unendliche Teilmenge von \mathbb{N} ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Die Summen $\sum_{n=1}^1 a_n, \sum_{n=1}^2 a_n, \dots, \sum_{n=1}^N a_n, \dots$ heissen *Partialsommen* und definieren eine Zahlenfolge, die möglicherweise einen Grenzwert hat, den wir dann mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnen.

Es ist sehr wichtig, zu verstehen, dass diese Notation nicht garantiert, dass die Reihe auch einen Wert annimmt. Der Ausdruck $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist die Bezeichnung (der Name sozusagen) für den Grenzwert der Partialsommen $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n$, und wenn dieser nicht existiert, dann ergibt der Ausdruck $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ möglicherweise auch keinen Sinn.

Falls dieser Grenzwert existiert, dann nennen wir ihn *Wert der Reihe* oder *Summe der Reihe* und die Reihe heisst *konvergent*.

Wenn der Grenzwert nicht existiert, dann können wir manchmal die “Werte” $+\infty, -\infty$ zuweisen, sodass es noch Sinn ergibt. Manchmal können wir uns aber einfach auf keinen Wert einigen, wie es zum Beispiel bei $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ der Fall ist.⁶

Eine Reihe heisst *absolut konvergent*, wenn die Reihe der Absolutbeträge ihrer Glieder, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, konvergiert.

⁶Vielleicht sollten wir einfach den Wert $\frac{1}{2}$ zuweisen?
https://www.youtube.com/watch?v=PCu_BNNI5x4

Übung 0.8.

1. Beweisen Sie die *Gaußsche Summenformel (kleiner Gauß)*,

$$\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

2. Begründen Sie, dass die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergiert. *Tip*: Finden Sie eine Reihe, die Term für Term kleiner ist und von der Sie sicher sind, dass sie divergiert.

- 3.* Zeigen Sie, dass die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

zu $\log 2$ konvergiert. Erklären Sie, warum dies keine absolut konvergente Reihe ist.

Funktionen und Graphen

Funktionen sind ein wichtiger Bestandteil der Mathematik. Mit einer Funktion können wir eine Beziehung zwischen zwei Mengen festlegen, sodass jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet wird.

Definition 0.9. Wir nennen f eine *Funktion* oder *Abbildung* von einer *Definitionsmenge* X in eine *Zielmenge* Y , wenn f jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y := f(x) \in Y$ zuordnet.

Wir schreiben $f : X \rightarrow Y$, $x \mapsto f(x)$. Das Element in der Zielmenge, das einem x in der Definitionsmenge zugeordnet wird, bezeichnen wir im Allgemeinen mit $f(x)$.

Wichtig. Denken Sie bei Funktionen *nicht* einfach an eine Formel, wie zum Beispiel $y = x^2$. Betrachten Sie Funktionen immer im Kontext des Definitions- und des Wertebereichs! Wenn Sie eine Funktion definieren, dann

1. geben Sie ihr einen Namen, zum Beispiel f ,
2. wählen Sie einen Definitions- und einen Wertebereich und schreiben Sie ihre Wahl auf als $f : X \rightarrow Y$,
3. deuten Sie an, dass x auf $f(x)$ abgebildet wird, $x \mapsto f(x)$, wobei $f(x)$ hier nun eine explizite Formel sein kann.

Bemerken Sie, dass der Pfeil \mapsto verwendet wird, wenn Elemente abgebildet werden, und \rightarrow benutzt man zwischen Definitions- und Wertebereich.

Zum Beispiel ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ eine korrekte Definition von “ $y = x^2$ ”.

Die Notation “ $y = x^2$ ” könnte Sie dazu veranlassen, die Funktion als ihren Graphen anzusehen. Aber der Graph einer Funktion ist nicht die Funktion.

▷ Der *Graph* Γ einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

Der Graph ist definiert durch

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1) = x_2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Bemerkung 0.10. Wir schreiben (x_1, x_2) und nicht (x, y) , da es einfacher ist, dies zu verallgemeinern. Zum Beispiel ist es leichter

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zu schreiben als sich Buchstaben und Symbole auszudenken, $x = (a, b, \dots, z, \odot, \star, \odot)$.

Eine weitere wichtige Notiz. $f : X \rightarrow Y$ ist eine Funktion, aber $f(x)$ ist *keine Funktion*. Der Ausdruck $f(x)$ ist die an dem Punkt x ausgewertete Funktion f , also ein Element aus Y .

Nennen Sie $f(x)$ nicht “Funktion”, da es keine ist!

Ein Satz “Die Funktion $f(x)$...” ist falsch und wird auch so gewertet.⁷

⁷Leider sieht man das sogar öfters in Lehrbüchern. Lassen Sie sich nicht beirren.

Wir bemerken, dass eine Abbildung nicht unbedingt allen Elementen in der Zielmenge ein Element aus der Definitionsmenge zuordnet.

- ▷ Eine Funktion, die alle Elemente der Zielmenge “trifft”, nennt man *surjektiv*, oder eine *Surjektion*. Genauer gilt,

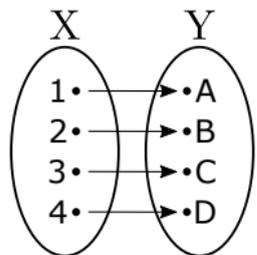
$f : X \rightarrow Y$ heisst *surjektiv*, wenn $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.

- ▷ Eine Funktion ist *injektiv*, oder eine *Injektion*, wenn verschiedene Elemente der Definitionsmenge auf verschiedene Elemente der Zielmenge abgebildet werden. Genauer,

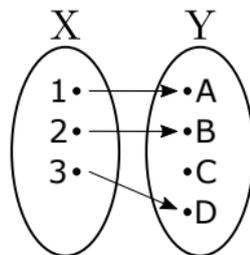
$f : X \rightarrow Y$ heisst *injektiv*, wenn

$\forall x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

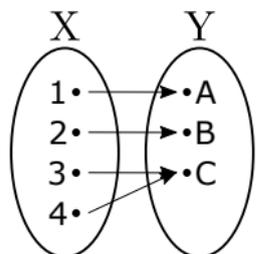
- ▷ Eine Abbildung, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist, heisst *bijektiv* oder eine *Bijektion*.



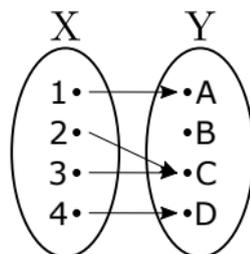
(a) Eine injektive und surjektive Funktion, also eine Bijektion



(b) Eine injektive, nicht surjektive Funktion



(c) Eine nicht injektive, surjektive Funktion



(d) Eine nicht injektive und nicht surjektive Funktion

Abbildung 0.3: Visualisierung von Injektionen, Surjektionen und Bijektionen.

Wir können die Zielmenge auch einschränken, sodass wir nur Werte $y \in Y$ berücksichtigen, die f auf der Definitionsmenge tatsächlich annimmt.

- ▷ Das *Bild* oder die *Bildmenge* einer Funktion $f : X \rightarrow Y$ wird mit $f(X)$ bezeichnet und ist definiert als

$$f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\} \subseteq Y.$$

Nicht verwirren lassen: Die Funktion f ist auf Elementen $x \in X$ definiert und nimmt keine Mengen als Argumente. Die Notation $f(X)$ ist eine Abkürzung für die oben definierte Menge.

Eine Funktion ist immer surjektiv auf ihr Bild.

Es gibt auch den Begriff der Einschränkung, der uns erlaubt den Definitionsbereich zu verkleinern.

- ▷ Eine *Einschränkung* oder *Restriktion* einer Funktion $f : X \rightarrow Y$ auf eine Teilmenge $A \subset X$ schreiben wir als $f|_A : A \rightarrow Y$ und definieren sie punktweise als $f|_A(x) = f(x)$, für $x \in A$.

Um die Wichtigkeit zu betonen, dass man unbedingt Definitionsbereich und Wertebereich angeben muss, betrachten wir eine kurze Übung. Hier werden Sie sehen, dass zwei auf den ersten Blick identische Funktionen sich sehr wohl stark unterscheiden.

Übung 0.11. Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ zwei Funktionen.

Sie wissen wahrscheinlich, dass die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Umkehrfunktion von g ist. Erklären Sie wieso sie *keine* Umkehrfunktion von f ist. Argumentieren Sie, dass f keine Umkehrfunktion besitzt. Was ist mit $f|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$?

Beispiel 0.12. Wir betrachten einige nützliche Funktionen.

1. Sei $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert als $|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$.

Wir nennen $|\cdot|$ die Betragsfunktion und die Zahl $|x|$ heisst der *Absolutbetrag* (oder einfach *Betrag*) von x .

2. Wir nennen $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$ die *Aufrundungsfunktion* (englisch: *ceiling function*). Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt sie uns die kleinste ganze Zahl, die grösser oder gleich x ist.

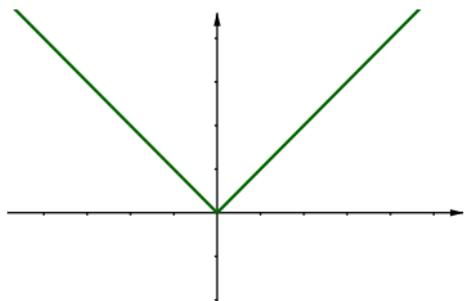
Analog nennen wir $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ definiert als $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid x \geq n\}$ die *Abrundungsfunktion* (englisch: *floor function*). Sie gibt uns die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

3. Wir sprechen oft von der Länge eines Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Die Länge kann als eine Funktion λ aufgefasst werden, die Teilmengen von \mathbb{R} auf \mathbb{R} abbildet. Sei $R = \{[a, b] \subset \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ die Menge aller abgeschlossenen, nicht-leeren Intervalle in \mathbb{R} . Dann definieren wir die Längenfunktion als

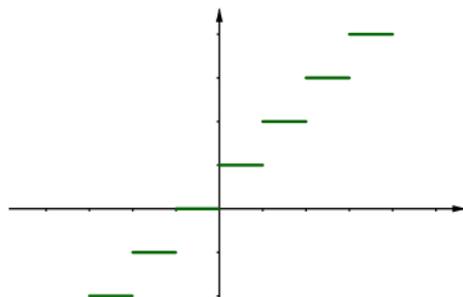
$$\lambda : R \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } [a, b] \mapsto b - a .$$

Tatsächlich kann man λ auf offene und halboffene Intervalle erweitern und wir setzen $\lambda([a, b)) = \lambda((a, b]) = \lambda((a, b)) = \lambda([a, b]) = b - a$.

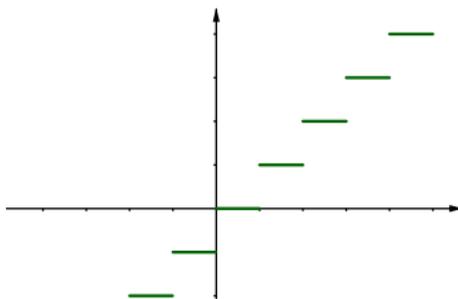
Insbesondere ist die "Länge" eines Punktes $x \in \mathbb{R}$ gleich 0. Des Weiteren setzen wir λ gleich 0 für die leere Menge \emptyset und $+\infty$ für alle Intervalle der Form (a, ∞) , $(-\infty, a)$ mit $a \in \mathbb{R}$.



(a) Graph von $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$



(b) Graph von $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$



(c) Graph von $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$

Abbildung 0.4: Graphen der Betragsfunktion, der Auf- und der Abrundungsfunktion.

Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von einer Menge X nach \mathbb{R} heisst *punktweise gegen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergent*, wenn für jedes $x \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Dieser Grenzwert ist also von x abhängig. Insbesondere haben wir Kontrolle über die Geschwindigkeit der Konvergenz der Funktionsfolge nur für ein gegebenes x und nicht für alle x gleichzeitig.

Um alle x gleichzeitig zu betrachten, führen wir den Begriff der *gleichmässigen Konvergenz* ein,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Hier betrachten wir nicht nur die Differenz für ein bestimmtes x , sondern wir betrachten die grösste solche Differenz aus allen $x \in X$.

Es ist ersichtlich, dass gleichmässige Konvergenz punktweise Konvergenz impliziert. Die andere Richtung ist im Allgemeinen nicht wahr. Es folgt ein klassisches Beispiel.

Beispiel 0.13. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionenfolge $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $x \mapsto x^n$. Diese Folge konvergiert punktweise gegen die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{wenn } x = 1. \end{cases}$$

In der Tat, für $x = 1$ gilt $1^n = 1$ und für $x = 0$ gilt $0^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in (0, 1)$ und eine Schranke $\epsilon > 0$ können wir $n \geq N(\epsilon, x) = \left\lceil \frac{\log \epsilon}{\log x} \right\rceil$ wählen, sodass $|f_n(x) - f(x)| = |x^n| = x^n < \epsilon$ gilt. Hierbei ist die Schranke $N(x, \epsilon)$ abhängig von ϵ und x .

Um einzusehen, dass die Folge nicht gleichmässig konvergiert, zeigen wir, dass es kein $N(\epsilon)$ gibt, sodass die Folge für alle $x \in [0, 1]$ konvergiert. Dazu wählen wir für gegebene N und ϵ einfach $x > \epsilon^{\frac{1}{N}}$ und erhalten somit $|f_n(x) - f(x)| > \epsilon$.

In vorhergehenden Vorlesungen haben Sie gelernt, wie man eine reellwertige Funktion integriert. Wir können das Integral einer Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als die *Fläche* zwischen ihrem Graphen und der x -Achse interpretieren.

Wir werden das an dieser Stelle nicht in grösserem Detail diskutieren. Stellen Sie sicher, dass Sie mit der Notation und den grundlegenden Eigenschaften vertraut sind.

Wir definieren hier den Begriffe der Integrierbarkeit, den wir in dieser Vorlesung benutzen:

- ▶ Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *integrierbar*, wenn das Integral ihres Absolutbetrags über den Definitionsbereich endlich ist,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx < \infty.$$

Diese Art der Integrierbarkeit wird manchmal auch als *absolut integrierbar* bezeichnet.

Es gibt sehr viele Beispiele für periodische (oder annähernd periodische) Funktionen, wie zum Beispiel ein Kind auf einer Schaukel, Planetenbewegungen, oder (Atom-)Uhren. In der Mathematik definieren wir periodische Funktionen wie folgt.

Definition 0.14. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *periodisch*, wenn es eine strikt positive Konstante $P > 0$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x + P) = f(x). \quad (0.1)$$

Solch eine Konstante $P > 0$ ist eine *Periode*. Die kleinste solche Konstante heisst *Grundperiode*. Manchmal schreiben wir auch “ f ist P -periodisch”, wenn wir eine Periode explizit nennen wollen.

Oftmals sagen wir *“die Periode”*, wenn wir eigentlich *“die Grundperiode”* meinen. Wir werden in [Bemerkung 0.15](#) sehen, dass die Existenz einer Periode die Existenz unendlich vieler Perioden impliziert. Deshalb ergibt es eigentlich nur Sinn von *“einer Periode”* und nicht von *“der Periode”* zu sprechen.

An dieser Stellen wollen wir betonen, dass wir mit unseren Formulierungen vorsichtig sein müssen. Trotzdem, wenn wir über mathematische Themen reden wollen, dann ist es oftmals hilfreich *“Umgangssprache”* zu verwenden. Das heisst, nachdem wir explizit einen Begriff eingeführt haben, werden wir uns darüber meistens in Umgangssprache unterhalten.

Wenn wir also von *“der Periode”* reden, dann wissen Sie, dass es sich um *“die Grundperiode”* handelt.

Bemerkung 0.15. Wir können eine P -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf ein beliebiges abgeschlossenes Intervall $I = [a, a + P]$, $a \in \mathbb{R}$, der Länge P einschränken. Wir erhalten die ganze Funktion, indem wir die eingeschränkte Funktion *periodisch fortsetzen*, das heisst indem wir sie “kopieren” und in die Intervalle $[a + nP, a + (n + 1)P]$, $n \in \mathbb{Z}$, “einfügen”.

Abbildung 0.5 illustriert dieses Vorgehen: Die durchgezogene Linie ist der Graph von $f|_I$ und die gestrichelten Linien repräsentieren die “Kopien” auf $[a - P, a]$ und $[a + P, a + 2P]$.

Vergleichen Sie die Graphen und vergewissern Sie sich, dass dies unabhängig von der Wahl des Intervalls funktioniert.

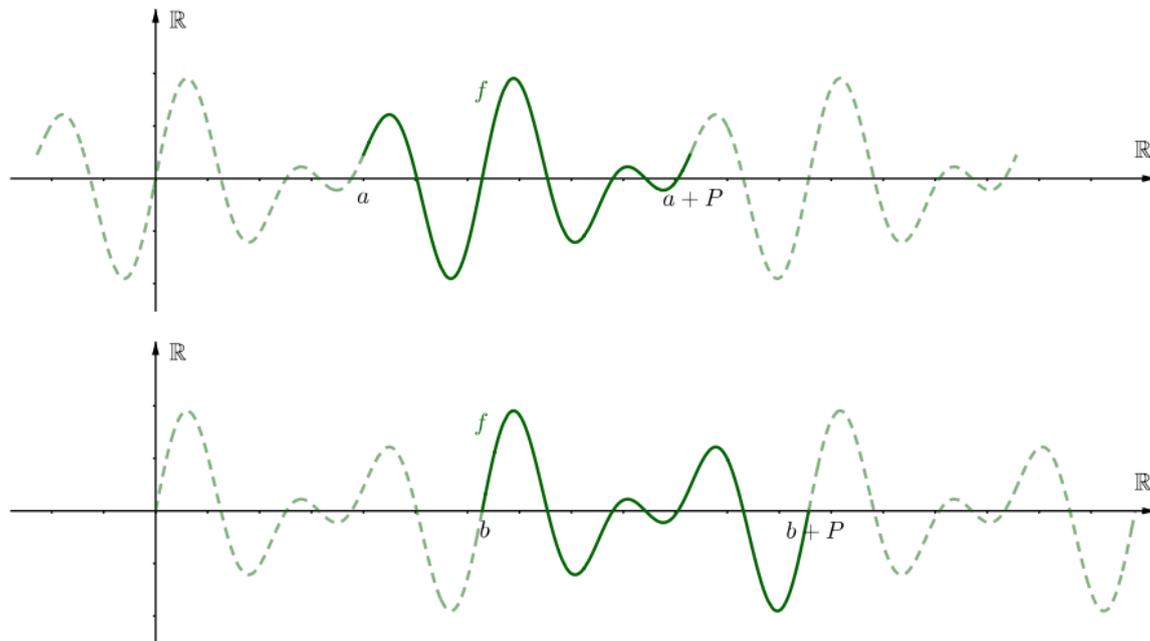


Abbildung 0.5: Eine P -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann von jedem Intervall der Länge P konstruiert werden.

Betrachten wir [Abbildung 0.5](#), können wir erahnen, dass jedes ganzzahlige Vielfache von P auch eine Periode von f ist. Um das zu beweisen, verwenden wir *vollständige Induktion über \mathbb{N}* .

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Periode P , sodass der *Induktionsanfang* mit [Gleichung \(0.1\)](#) erfüllt ist.

Im *Induktionsschritt* zeigen wir mithilfe der *Induktionsannahme (IA)*, $f(x + nP) = f(x)$, für ein fixes $n \in \mathbb{N}$, dass die *Induktionsbehauptung* erfüllt ist, $f(x + (n + 1)P) = f(x)$. Das geschieht so,

$$f(x + (n + 1)P) = f(x + nP + P) \stackrel{(0.1)}{=} f(x + nP) \stackrel{\text{IA}}{=} f(x).$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x - (n + 1)P) &\stackrel{(0.1)}{=} f(x - (n + 1)P + P) = f(x - nP) \\ &\stackrel{\text{IA}}{=} f(x - nP + nP) = f(x). \end{aligned}$$

Somit folgt, dass alle Elemente in $\{nP \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ Perioden von f sind (*Induktionsschluss*). Wir haben also folgendes Resultat hergeleitet:

Wenn eine Periode existiert, dann ist sie nicht eindeutig und es gibt unendlich viele Perioden.

Stellen Sie sicher, dass Sie mit der vollständigen Induktion vertraut sind. Sie ist eine sehr nützliche mathematische Beweismethode.

Übung 0.16. Beweisen Sie die Gaußsche Summenformel mithilfe vollständiger Induktion. Für den Induktionsanfang starten Sie mit $N = 1$ und zeigen, dass die Formel erfüllt ist. Im Induktionsschritt zeigen Sie dann, dass aus der Induktionsannahme, $\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$, die Induktionsbehauptung, $\sum_{n=1}^{N+1} n = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$, folgt.

Übung 0.17. Erklären Sie, wie das “Kopieren und Einfügen” in [Bemerkung 0.15](#) funktioniert. Sei dafür $a \in \mathbb{R}$ und $g : I = [a, a + P] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass $g(a) = g(a + P)$ gilt. Konstruieren Sie eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Periode P , sodass $f|_I = g$.

Ist P notwendigerweise die Grundperiode von f ?

Bemerkung 0.18. An dieser Stelle wollen wir noch erwähnen, dass der Begriff einer periodischen Funktion auch auf Teilmengen von \mathbb{R} definiert werden kann. In der Praxis können zum Beispiel Intervalle ein Zeitfenster repräsentieren, also von der Form $[0, T]$, $T > 0$, sein.

Ergibt es Sinn, von Periodizität zu sprechen, wenn zum Beispiel $2P \geq T$? Oftmals ist es praktisch, ein Intervall so zu wählen, dass die Länge ein Vielfaches einer Periode ist, $T' = nP$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Bemerken Sie auch, dass es für Funktionen, die nur auf Intervallen definiert sind, nicht unendlich viele Perioden gibt. Aber wir könnten ja unsere Fähigkeit nutzen, Funktionen auf \mathbb{R} periodisch fortzusetzen.

Im Folgenden behandeln wir wieder periodische Funktionen auf ganz \mathbb{R} . Die wahrscheinlich bekanntesten Funktionen sind die Sinus- und die Kosinusfunktion (auch Cosinusfunktion).

Beispiel 0.19. Sowohl die Sinus- als auch die Kosinusfunktion sind periodische Funktionen mit Grundperiode 2π .

Übung 0.20. Ist die Tangensfunktion auch eine periodische Funktion?

Übung 0.21.

1. Zeigen Sie, dass die Summe, die Differenz und das Produkt zweier periodischer Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der *gleichen Grundperiode* P wiederum P -periodische Funktionen sind.

Welche weitere Annahme ist nötig, damit die Aussage auch für Quotienten gilt?

Tipp. Definieren Sie die Summe der Funktionen f und g punktweise für alle $x \in \mathbb{R}$ als $z(x) = f(x) + g(x)$. Benutzen Sie dann [Gleichung \(0.1\)](#). Zeigen Sie den Rest analog.

- 2.* Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x) + \sin(2\pi x)$ periodisch? Können Sie eine Bedingung finden, sodass die Summe zweier periodischer Funktionen auf \mathbb{R} eine periodische Funktion definiert?

Als nächstes zeigen wir eine nützliche Integraleigenschaft periodischer Funktionen.

Lemma 0.22. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine P -periodische Funktion. Wenn f auf einem Intervall der Länge P integrierbar ist, dann ist sie auf allen Intervallen der Länge P integrierbar. Insbesondere sind die Werte der Integrale gleich, das bedeutet für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^{a+P} f(x) \, dx = \int_b^{b+P} f(x) \, dx. \quad (0.2)$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) (englisch: without loss of generality (w.l.o.g.)) können wir $a = 0$ und $b \in [0, P]$ wählen. Wir teilen das Integral auf dem Intervall $[b, b + P] = [b, P] \cup (P, b + P]$ auf, verwenden die Periodizität und erhalten

$$\begin{aligned}\int_b^{b+P} f(x) dx &= \int_b^P f(x) dx + \int_P^{b+P} f(x) dx \\ &= \int_b^P f(x) dx + \int_0^b f(x+P) dx \\ &= \int_b^P f(x) dx + \int_0^b f(x) dx = \int_0^P f(x) dx. \quad \square\end{aligned}$$

Übung 0.23. Erklären Sie, wieso wir den Beweis mit “o.B.d.A.” beginnen. Das bedeutet, erklären Sie, wieso es genügt, den Fall $a = 0$ und $b \in [0, P]$ zu zeigen. Vervollständigen Sie den Beweis von [Lemma 0.22](#) für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.

Übung 0.24. Erklären Sie, wieso eine P -periodische Funktion, die auf einem Intervall der Länge P integrierbar ist, auf jedem Intervall endlicher Länge integrierbar ist.

In diesem Unterkapitel führen wir einseitige Grenzwerte ein und diskutieren verschiedene Arten von Unstetigkeitsstellen.

Definition 0.25. Ein einseitiger Grenzwert ist einer der beiden Grenzwerte einer reellwertigen Funktion $x \mapsto f(x)$ wenn x sich von oben (rechts) oder von unten (links) an einen bestimmten Wert x_0 annähert.⁸

An einem Punkt x_0 sind der *linksseitige Grenzwert* $L^- \in \mathbb{R}$ und der *rechtsseitige Grenzwert* $L^+ \in \mathbb{R}$ Zahlen, für die für beliebiges $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Implikationen jeweils gelten,

$$\triangleright 0 < x_0 - x < \delta \implies |f(x) - L^-| < \epsilon,$$

$$\triangleright 0 < x - x_0 < \delta \implies |f(x) - L^+| < \epsilon.$$

⁸Wir stellen uns hier die Zahlengerade vor.

Existieren die Grenzwerte, dann schreiben wir für den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x),$$

und für den rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x).$$

Die Funktion f ist genau dann *stetig in x_0* , wenn beide Grenzwerte existieren und gleich dem Funktionswert an dieser Stelle sind,

$$f(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

Andernfalls besitzt f im Punkt x_0 eine Unstetigkeitsstelle. Wir unterscheiden dann vier Fälle.

1. Wenn beide Grenzwerte existieren, endlich und gleich sind, dann heisst die Unstetigkeitsstelle *hebbar*. Solch eine Unstetigkeitsstelle kann man entfernen (beheben) und die resultierende Funktion an diesem Punkt stetig machen.
2. Wenn beide Grenzwerte existieren, endlich aber nicht gleich sind, dann spricht man von einer *Sprungstelle*. Hier definiert man den *Sprung*

$$\delta = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) - \lim_{x \uparrow x_0} f(x). \quad (0.3)$$

Diese zwei Arten von Unstetigkeitsstellen nennt man auch *Unstetigkeitsstellen erster Art*.

3. Wenn beide Grenzwerte “existieren”, aber mindestens einer der beiden Grenzwerte nur im uneigentlichen Sinne existiert, also gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt, dann sprechen wir von einer *Polstelle*.
4. Zuletzt gibt es noch die Möglichkeit, dass mindestens einer der Grenzwerte weder eigentlich noch uneigentlich existiert.

Bei diesen zwei Arten von Unstetigkeitsstellen handelt es sich um *Unstetigkeitsstellen zweiter Art* oder *wesentliche Unstetigkeiten* (englisch: *essential discontinuities*).

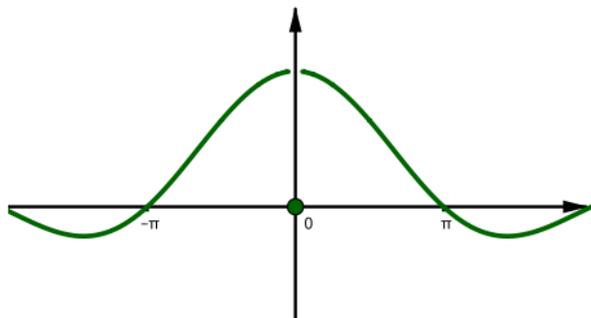
Bemerkung 0.26.

1. Wenn sowohl der links- als auch der rechtsseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen, dann definieren wir den *beidseitigen Grenzwert*,

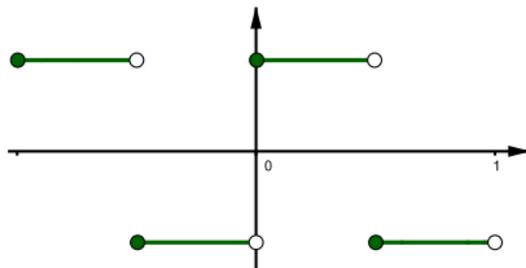
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x).$$

2. Wir werden in [Beispiel 0.27](#) sehen, dass es oftmals Sinn ergibt, die Grenzwerte $+\infty = \infty$ und $-\infty$ zu erlauben. Allerdings gilt, $\{-\infty, +\infty\} \not\subseteq \mathbb{R}$, sodass es eigentlich nicht mit [Definition 0.25](#) in Einklang ist. Wir können dieses Problem lösen, indem wir die (*affinen*) *erweiterten reellen Zahlen* einführen, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, und somit $\pm\infty$ erlauben.

Beispiel 0.27. (*Arten von Unstetigkeitsstellen*) Fangen wir mit ein paar “schönen” Unstetigkeitsstellen in *Abbildung 0.6* an.



(a) Eine hebbare Unstetigkeitsstelle bei $x = 0$ von $\frac{\sin(x)}{x}$



(b) Sprungstellen einer Rechteckschwingung

Abbildung 0.6: Visualisierung einer hebbaren Unstetigkeitsstelle und von Sprungstellen

(a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

A priori wissen wir nicht, welchen Wert $\frac{\sin(x)}{x}$ bei 0 annimmt, also setzen wir einfach $f(0) = 0$ (damit die Funktion auf ganz \mathbb{R} definiert ist).

Tatsächlich stellt sich heraus, wenn wir die Taylorreihe von Sinus betrachten, oder L'Hôpitals Regel benutzen, dass $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ gilt.

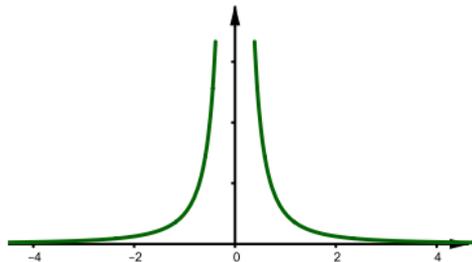
Das ist also eine *hebbare Unstetigkeitsstelle*, denn wir können $f(0) = 1$ setzen, womit wir die Unstetigkeitsstelle aufheben und f bei 0 stetig machen. (Das machen wir aber nicht, da wir ein Beispiel einer hebbaren Unstetigkeitsstelle brauchen.)

(b) Wir definieren eine Rechteckschwingung als

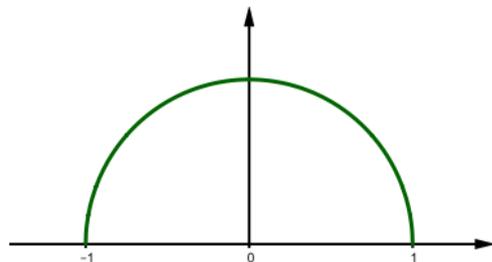
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } \lfloor 2x \rfloor \bmod 2 = 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier bezeichnet mod die Modulo Funktion $\text{mod} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \mapsto a \bmod b := a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot b$. Mit $b = 2$ ist $a \bmod 2$ gleich 0, wenn a gerade ist, und gleich 1, wenn a ungerade ist.

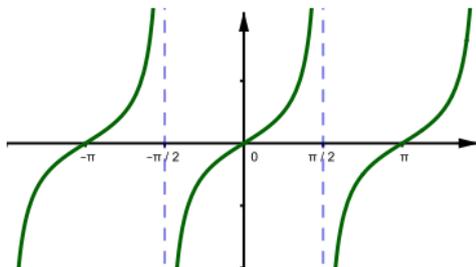
Betrachten wir zum Beispiel die Sprungstelle bei $x_0 = 0$. Wir erhalten $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = -1$ und $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = 1$. Insbesondere existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nicht und wir haben eine Sprungstelle bei $x_0 = 0$ mit Sprung $\delta = 2$. Bei $x_0 = \frac{1}{2}$ haben wir eine Sprungstelle mit Sprung $\delta = -2$.



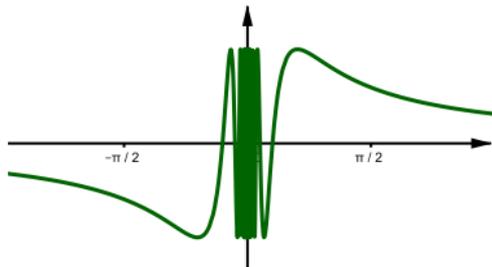
(c) Polstelle von $x \mapsto \frac{1}{x^2}$



(d) Unstetigkeitsstellen an den Endpunkten



(e) Polstellen der Tangensfunktion
 $x \mapsto \tan(x)$



(f) Wesentliche Unstetigkeitsstelle von
 $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Abbildung 0.7: Illustration einseitiger Grenzwerte und Unstetigkeitsstellen

(c) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Diese Funktion hat laut [Definition 0.25](#) weder links- noch rechtsseitigen Grenzwert. Wenn wir jedoch $+\infty$ erlauben, können wir $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = +\infty$ schreiben. Somit ergibt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ Sinn. So eine Unstetigkeitsstelle nennen wir *Polstelle*.

(d) Sei $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ definiert durch $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Wir erhalten $\lim_{x \downarrow -1} f(x) = 0$ und $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = 0$, aber $\lim_{x \uparrow -1} f(x)$ und $\lim_{x \downarrow 1} f(x)$ existieren nicht, da f ausserhalb von $[-1, 1]$ nicht definiert ist. Somit existieren $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nicht.

(e) Sei $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ die Tangensfunktion, definiert durch $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Wir können die Tangensfunktion auf alle Intervalle der Form $(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi)$, für $k \in \mathbb{Z}$, fortsetzen und sie dadurch auf $\cup_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi)$ definieren. Keiner der einseitigen Grenzwerte existiert an den Unstetigkeitsstellen. Wir sehen, dass wenn $x < x_0$ gegen x_0 läuft, der Tangens gegen $+\infty$ strebt. Analog erhalten wir den rechtsseitigen Grenzwert $-\infty$. In diesem Fall ist $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan(x)$ nicht definiert.

(f) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [0, 1]$ definiert durch $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. In diesem Fall existieren weder $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ noch $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$, nicht einmal uneigentlich. Dies ist auch eine *wesentliche Unstetigkeitsstelle*.

Übung 0.28. Lassen Sie uns diese Konzepte üben.

Geben Sie den grösstmöglichen Definitionsbereich, die links- und rechtsseitigen Grenzwerte und, wenn möglich, die Sprünge der folgenden Funktionen an.

▷ $f(x) = \lfloor x \rfloor$ an allen $x_0 \in \mathbb{N}$,

▷ $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ bei $x_0 = 0$,

▷ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$ bei $x_0 = 0$,

▷ $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ bei $x_0 = \pm 3$.

Tipp. L'Hôpitals Regel kann hier nützlich sein.

Bemerkung 0.29. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ stetig und sei $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Wenn wir f auf den Intervallen $[(k-1)\pi, (k+1)\pi)$ periodisch fortsetzen, erhalten wir an den Punkten $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Sprungstellen mit gleichen Sprüngen

$$\delta = f(-\pi) - f(\pi).$$

Dies gilt allerdings nicht für die Tangensfunktion, wie wir in [Beispiel 0.27](#) gesehen haben. Wieso nicht?

Im Folgenden betrachten wir Funktionen, die eine Art Symmetrie aufweisen.

Definition 0.30. Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(-x) = f(x).$$

Wir nennen f *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(-x) = -f(x).$$

Diese Begriffe können auch für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}$ verwendet werden. Hier muss man nur sicherstellen, dass für jedes $x \in A$ auch $-x \in A$.

Der Graph einer geraden Funktion ist *spiegelsymmetrisch* an der y -Achse. Der Graph einer ungeraden Funktion ist hingegen *punktsymmetrisch* am Ursprung $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Wie in [Abbildung 0.8](#) illustriert, reicht für die Berechnung des Integrals von f über $[-\ell, \ell]$, $\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, die Berechnung des Integrals über $[0, \ell]$. Tatsächlich zeigt eine kurze Rechnung, dass gerade Funktionen für jedes $\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ Folgendes erfüllen,

$$\begin{aligned}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \, dx &= \int_{-\ell}^0 f(x) \, dx + \int_0^{\ell} f(x) \, dx = - \int_0^{-\ell} f(x) \, dx + \int_0^{\ell} f(x) \, dx \\ &= \int_0^{\ell} f(-x) \, dx + \int_0^{\ell} f(x) \, dx = 2 \int_0^{\ell} f(x) \, dx.\end{aligned}\tag{0.4}$$

Für eine ungerade Funktion f erhalten wir mit einer ähnlichen Rechnung

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \, dx = 0.\tag{0.5}$$

Beispiel 0.31. Die Kosinusfunktion ist gerade, die Sinusfunktion ist hingegen ungerade. In der Tat erhalten wir, für $\ell = \pi$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(x) dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = 2 - 2 = 0.$$

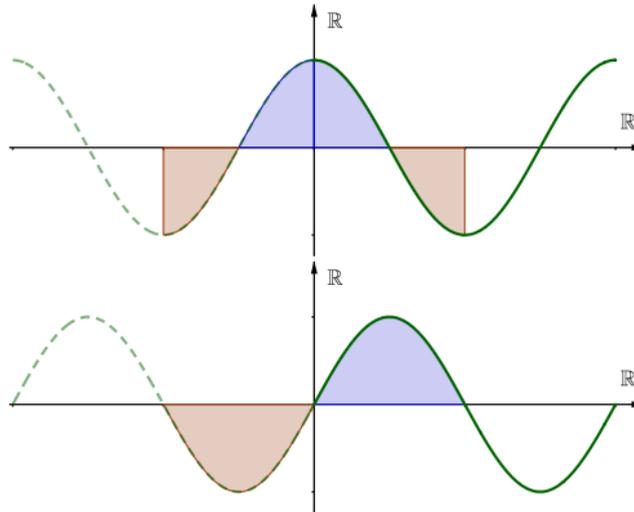


Abbildung 0.8: Illustration der Integrale der Kosinus- und Sinusfunktion, wobei blaue Flächen einen positiven Beitrag und rote Flächen einen negativen Beitrag zum Integral leisten.

Die folgenden Eigenschaften folgen direkt aus der Definition von geraden und ungeraden Funktionen.

Übung 0.32. Betrachten Sie Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und zeigen Sie die folgenden Behauptungen.

1. Das Produkt zweier gerader oder ungerader Funktionen ist eine gerade Funktion.
2. Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

Lineare Algebra

Die lineare Algebra befasst sich mit Vektorräumen und linearen Abbildungen zwischen diesen Räumen.

- ▷ Wir werden die Begriffe der Vektorräume und ihrer Basen wiederholen.
- ▷ Wir werden mit linearen Funktionen und ihrer Repräsentation als Matrizen fortfahren. Wir werden wiederholen, wie man die Determinante, das charakteristische Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet.
- ▷ Zuletzt verwenden wir diese Resultate, um Matrizen zu diagonalisieren und Potenzen von Matrizen zu berechnen.

Nach der Einführung der wichtigsten Mengen, \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , können wir diesen Struktur geben.

Wenn wir an eine Menge denken, assoziieren wir oft gewisse Operationen, oder “Rechenregeln”, mit dieser Menge. Zum Beispiel wissen wir, dass für $a, x, y \in \mathbb{R}$ gilt $a(x + y) = ax + ay$, die Multiplikation ist also distributiv.

Es wird vorausgesetzt, dass Sie mit diesen Rechenregeln vertraut sind, einschliesslich der Potenzgesetze und so weiter.

Hier schauen wir uns euklidische Vektorräume aber nochmal genauer an. Insbesondere betrachten wir \mathbb{R}^n für $n \in \mathbb{N}$.

Elemente in \mathbb{R}^n heissen *Vektoren* oder *Punkte* (je nach Kontext) und werden mit n -Tupeln $x = (x_1, \dots, x_n)$ identifiziert, wobei $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ist die reelle Zahlengerade und \mathbb{R}^2 ist die euklidische Ebene. Sie sollten mit den folgenden Operationen vertraut sein:

- ▷ Vektoraddition: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt
 $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$.
- ▷ Skalarmultiplikation⁹: Für ein *Skalar* $a \in \mathbb{R}$ und einen *Vektor* $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $ax = (ax_1, \dots, ax_n) \in \mathbb{R}^n$.

⁹Nicht zu verwechseln mit dem Skalarprodukt.

Definition 0.33. Wir nennen eine Menge einen Vektorraum, wenn die Menge zusammen mit Vektoraddition und Skalarmultiplikation die folgenden Axiome erfüllt:

- ▷ *Vektoraddition*: Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Existenz eines neutralen Elements, Existenz von inversen Elementen.
- ▷ *Skalarmultiplikation*: Verträglichkeit von Multiplikationen, Existenz eines Einselements, Distributivgesetz von Vektor- und Skalaraddition.

Übung 0.34. Zeigen Sie, dass \mathbb{R}^n zusammen mit oben definierten Vektoraddition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist.

Tipp. Wenn Sie sich nicht mehr erinnern können, was diese Axiome bedeuten, ist Wikipedia ein guter Startpunkt für die Suche.

Wir definieren noch eine weitere nützliche Operation:

▷ *Skalarprodukt*¹⁰: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert man $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j \in \mathbb{R}$.

Die Norm (oder Länge) eines Vektors x wird geschrieben als $\|x\|$ und ist definiert durch $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$.

Für euklidische Vektoren, die wir tatsächlich als Pfeile betrachten können (wenigstens für $n \leq 3$), kann das innere Produkt auch folgendermassen geschrieben werden:

$$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos(\vartheta),$$

wobei ϑ der Winkel zwischen x und y ist. Das ist vor allem dann nützlich, wenn wir den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen wollen. Dieser ist gegeben als

$$\vartheta = \arccos \left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right).$$

¹⁰Auch *inneres Produkt* oder *Punktprodukt* (englisch: *dot product*) genannt.

Definition 0.35. Eine Basis ist eine Teilmenge eines Vektorraumes, mit der sich jedes Element des Vektorraumes eindeutig als Linearkombination schreiben lässt. Die Elemente einer Basis heissen Basisvektoren.

Oft wählt man für \mathbb{R}^n die sogenannte *Standardbasis* mit den *kanonischen Einheitsvektoren*, $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$,

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)^T, \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)^T.$$

Bemerkung 0.36. Die *Transpositionsabbildung* T vertauscht die Zeilen- und Spaltenindizes einer Matrix. Normalerweise stellen wir uns Vektoren als *Spaltenvektoren* vor. Wir benutzen hier die Transponierung lediglich, um Platz zu sparen. Ein Beispiel,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die Einheitsvektoren sind normiert, $\|e_1\| = \dots = \|e_n\| = 1$, und sie sind paarweise orthogonal, das bedeutet

$$\text{für } 1 \leq k, \ell \leq n, k \neq \ell \text{ erhalten wir } e_k \cdot e_\ell = 0.$$

Die Einheitsvektoren stellen die Achsen des *kartesischen Koordinatensystems* dar und jedes Element in \mathbb{R}^n kann als (endliche) Linearkombination dieser dargestellt werden.

Zum Beispiel können wir jeden Punkt auf dem Einheitskreis in \mathbb{R}^2 als $x = (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))^T$ schreiben. Wenn wir diese Koordinaten auf die vertikale und die horizontale Achse “aufteilen”, können wir $x = \cos(\vartheta)e_1 + \sin(\vartheta)e_2$ schreiben.

Wenn eine Basis von \mathbb{R}^n gegeben ist (wir werden normalerweise die Standardbasis verwenden), kann jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ *eindeutig* durch ein $m \times n$ -Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ repräsentiert werden.

Die *Einträge* oder *Komponenten* einer Matrix werden mit zwei Indizes $A = (A_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ angegeben, wobei der *erste Index die Zeile* und der *zweite Index die Spalte* angibt. Verschiedene Basen geben in der Regel auch verschiedene Matrixrepräsentationen der gleichen Funktion.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto (x_1, -x_2)^T$.

Das ist die Reflektion an der x -Achse. Wir können diese lineare Funktion durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ angeben (mit der Standardbasis), da

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

Übung 0.37. Betrachten Sie \mathbb{R}^n mit der Standardbasis und schreiben Sie die folgenden Funktionen mithilfe einer Matrix

▷ $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto ax$, für ein $a \in \mathbb{R}$,

▷ $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $x \mapsto (x_1 + 2x_2, x_2 - 3x_3)^T$.

Ist es möglich, die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ durch eine Matrix zu repräsentieren?

Tipp. Wieso nicht?

Übung 0.38. Hier gibt es einige Übungen zu Matrixoperationen und ihren Eigenschaften. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei $a \in \mathbb{R}$.

- ▷ Berechnen Sie aA , $A + B$, AB .
- ▷ Zeigen Sie, dass $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$, und $(AB)^T = B^T A^T$ gelten.
- ▷ Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $AB \neq BA$.
- ▷ Schreiben Sie das Skalarprodukt $x \cdot y$ zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mithilfe einer Transponierung und der Matrixmultiplikation.

Matrizen sind sehr nützlich, wenn wir *lineare Gleichungssysteme* lösen wollen. Ein *System m linearer Gleichungen mit n Unbekannten* lässt sich in folgende Form bringen,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Dieses System können wir auch kompakter in Matrixnotation schreiben. Wir fassen die Koeffizienten des System in der $(m \times n)$ -*Koeffizientenmatrix* $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ zusammen, und definieren $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ als den Vektor der Konstanten und $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}$ als den Vektor der Unbekannten. Somit lässt sich das Gleichungssystem wie folgt schreiben,

$$Ax = b.$$

Dieses Gleichungssystem könnte eine Lösung $x = A^{-1}b$ besitzen, wenn A *invertierbar* (oder *regulär*) ist, das bedeutet, wenn die *Inverse* A^{-1} existiert.

Definition 0.39. Die *inverse Matrix* (*Kehrmatrix*, *Inverse*) A^{-1} einer $(n \times n)$ -Matrix A ist auch eine $(n \times n)$ -Matrix, sodass $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei I_n (manchmal $\mathbb{1}_n$) die $(n \times n)$ -*Einheitsmatrix* bezeichnet,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrizen die keine Inverse besitzen nennt man *singulär*.

Die Determinante einer reellwertigen, quadratischen Matrix A ist ein Wert $\det A \in \mathbb{R}$ (oder $\det(A)$, $|A|$), der (grob gesagt) den Skalierungsfaktor von A angibt.

Formal ist die Determinante eine Abbildung vom Raum aller quadratischen Matrizen in den zugrunde liegenden Körper (in unserem Fall \mathbb{R}), die multilinear (linear in jeder Spalte), alternierend (gleich 0, wenn zwei Spalten gleich sind) und normiert ($\det I_n = 1$) ist.

Die Determinante ist aber auch ein sehr hilfreiches Werkzeug bei der Lösung linearer Gleichungssysteme. Wir werden sie vor allem benutzen, um herauszufinden, ob ein gegebenes System überhaupt eine Lösung hat.

Proposition 0.40. Eine quadratische Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn ihre Determinante $\det A$ ungleich 0 ist. In diesem Fall gilt $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Im Folgenden wiederholen wir die Berechnung von (2×2) -, (3×3) - und grösseren Matrizen.

Proposition 0.41. Sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ eine $(n \times n)$ -Matrix.

1. Für $n = 2$ ist die Determinante von A gegeben durch

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Für $n = 3$ ist sie gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

3. Für beliebige n benutzen wir die *Leibniz-Formel*, oder genauer, den *Laplaceschen Entwicklungssatz*, der im Wesentlichen eine Auswertungsmethode der Leibniz-Formel ist.

Für eine feste Spalte $1 \leq j \leq n$ nimmt es folgende Form an

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

und für eine feste Zeile $1 \leq i \leq n$ erhalten wir

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

A_{ij} ist hier die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die man aus A erhält, wenn man die i -te Zeile und die j -te Spalte entfernt. Die Determinante $\det A_{ij}$ nennt man *Minor* oder *Unterdeterminante* ($(n-1)$ -ter Ordnung) von A . Die Berechnung von $\det A$ ist unabhängig von der Wahl der Zeile oder Spalte, über die man iteriert. Daher ist es oft sinnvoll Zeilen oder Spalten zu wählen, in denen viele Nullen stehen.

Beispiel 0.42. Wir möchten wissen, ob die folgende Matrix regulär ist, also eine Inverse besitzt. Laut [Proposition 0.40](#) ist das der Fall, wenn ihre Determinante ungleich 0 ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 3 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Da es eine (4×4) -Matrix ist, wenden wir den Laplaceschen Entwicklungssatz an. Wir bemerken, dass die Matrix drei Nullen in der dritten Reihe hat. Um also unsere Berechnung zu vereinfachen, halten wir die dritte Zeile fest und iterieren über alle Spalten. Wir erhalten

$$\det A = \sum_{j=1}^4 (-1)^{3+j} a_{3,j} \det A_{3,j}.$$

Da $a_{3,1} = a_{3,2} = a_{3,3} = 0$, brauchen wir nur die (3×3) -Matrix $A_{3,4}$, die wir durch Streichen der dritten Zeile und der vierten Spalte erhalten.

$$A_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 3 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Da wir nun eine (3×3) -Matrix haben, können wir ihre Determinante direkt mit [Proposition 0.41](#) für $n = 3$ berechnen. Schliesslich erhalten wir

$$\det A = (-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-20 + 0 - 9 - 36 - 4 - 0) = 69,$$

und wissen somit, dass A invertierbar ist.

Stellen Sie sicher, dass Sie mit Determinanten und ihrer Berechnung vertraut sind. Es folgen einige Aufgaben zum Üben.

Übung 0.43. Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen und entscheiden Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Matrizen regulär sind.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3a & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & 2 \\ \frac{1}{2} & 4a \end{pmatrix}$

2. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & a \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

3. $F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -3 \\ a & 3a & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -a & 7 \end{pmatrix}$

Sie sollten folgende Lösungen erhalten.

1. $\det A = -4a$, $\det B = 0$, $\det C = 4a^2 - 1$,

2. $\det D = 27 - 3a$, $\det E = a$,

3. $\det F = 10a^2 + 15a$.

Laut [Proposition 0.40](#) sind A und E für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ regulär, B ist für kein $a \in \mathbb{R}$ regulär, C ist regulär für $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{1}{2}\}$, D regulär für $a \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$ und F ist regulär für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{3}{2}\}$.

Es folgen einige nützliche Eigenschaften von Determinanten.

Proposition 0.44. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei $a \in \mathbb{R}$, dann gelten folgende Aussagen.

1. Die Determinante ist eine multiplikative Abbildung, das bedeutet $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
2. Wenn A eine Dreiecksmatrix ist, das bedeutet für alle $i < j$ (oder $i > j$) gilt $a_{ij} = 0$, dann ist die Determinante das Produkt der Diagonalelemente, $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.
3. Wenn man aus A durch Vertauschen einer Zeile (oder Spalte) B erhält, dann gilt $\det B = -\det A$.
4. Wenn man aus A durch Addieren eines Vielfaches einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen B erhält, dann gilt $\det B = \det A$.
5. Wenn man aus A durch Multiplikation einer Zeile (oder Spalte) mit einer Konstanten a B erhält, dann gilt $\det B = a \det A$.

Übung 0.45. Beweisen Sie mithilfe der Aussagen 1. und 2. in [Proposition 0.44](#), dass $\det(aA) = a^n \det A$, $a \in \mathbb{R}$, gilt.

Mit Aussage 2. in [Proposition 0.44](#) können wir sehr schnell eine Determinante berechnen. Allerdings funktioniert das nur bei Dreiecksmatrizen. Mit dem sogenannten *Gaußschen Eliminationsverfahren* kann man oft eine Matrix in eine Dreiecksmatrix umformen und, wenn man die Eigenschaften in [Proposition 0.44](#) beachtet, die Determinante berechnen.

Übung 0.46. Erklären Sie die Umformungen, die zur Berechnung der Determinante, angewandt wurden. Insbesondere erklären Sie wo die Eigenschaften 2., 3. und 4. aus Proposition 0.44 angewandt wurden.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 3 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 3 & -4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 3 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 0 & -4 & 13 & 2-3a \\ 0 & 5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & a \\ 0 & -4 & 13 & 2-3a \\ 0 & 0 & \frac{65}{4} + 1 & -\frac{6+15a}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= - \left(1 \cdot (-4) \cdot \left(\frac{65}{4} + 1 \right) \cdot 1 \right) = 69.
 \end{aligned}$$

Definition 0.47. Sei A eine quadratische Matrix. Ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ heisst *Eigenvektor zum Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn der Vektor Ax ein λ -Vielfaches von x ist,

$$Ax = \lambda x. \quad (0.6)$$

Übung 0.48. Betrachten Sie die folgende Gleichung und finden Sie den Eigenwert λ zum gegebenen Eigenvektor.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn man die Eigenvektoren einer Matrix nicht kennt, dann kann man das *charakteristische Polynom* verwenden, um die Eigenwerte zu berechnen. Dazu schreiben wir *Gleichung (0.6)* als

$$\lambda x - Ax = (\lambda I_n - A)x = 0.$$

Da $x \neq 0$ gilt, ist die Matrix $\lambda I_n - A$ *singulär* (nicht invertierbar) und ihre Determinante ist also 0.

Definition 0.49. Das *charakteristische Polynom* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die Determinante der Matrix $\lambda I_n - A$,

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0. \quad (0.7)$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind also die Eigenwerte von A .

Beispiel 0.50. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ die Matrix aus [Übung 0.43](#). Wir berechnen das charakteristische Polynom als

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_n - A) &= \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -a \\ -4 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda - 3) - 4a = \lambda^2 - 3\lambda - 4a. \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind $\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{16a+9}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{16a+9}}{2}$. Für $a = 1$ erhalten wir $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$. Löst man nun [Gleichung \(0.6\)](#) mit diesen Eigenwerten, erhält man die Eigenvektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zusätzlich zu dieser Anwendung, gibt es einige interessante Eigenschaften,

- ▷ der Koeffizient a_n von λ^n ist immer 1,
- ▷ der Koeffizient a_{n-1} von λ^{n-1} ist $-\text{tr}(A) = -\sum_{j=1}^n a_{jj}$, und
- ▷ der Koeffizient a_0 ist gleich $(-1)^n \det A$.

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heisst *Diagonalmatrix*, wenn alle Einträge ausserhalb der *Hauptdiagonalen* gleich 0 sind, also wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$. Wir schreiben Diagonalmatrizen oftmals als

$$A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Definition 0.51. Eine quadratische Matrix A heisst *diagonalisierbar*, wenn sie *ähnlich* zu einer Diagonalmatrix ist. Das bedeutet, es existiert eine invertierbare Matrix P , sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

Proposition 0.52. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn die Eigenvektoren von A eine Basis von \mathbb{R}^n bilden. In diesem Fall erhalten wir P , indem wir die Eigenvektoren als Spalten von P auffassen.

Beispiel 0.53. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ aus [Beispiel 0.50](#). Wir haben bereits die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ mit den dazugehörigen Eigenvektoren $x_1 = (1, -4)^\top$ und $x_2 = (1, 1)^\top$ berechnet. Laut [Proposition 0.52](#) können wir die Spalten von P durch diese Eigenvektoren definieren,

$$P = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet schnell, dass $\det P = 5 \neq 0$ gilt. Somit sind die Eigenvektoren linear unabhängig und P ist invertierbar.

Mit dem *Gauß-Jordan-Algorithmus*¹¹ berechnen wir die Inverse als

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix erhalten wir nun direkt durch Multiplikation,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Reihenfolge der Spalten in P beeinflusst die Reihenfolge der Eigenwerte in der Diagonalmatrix.

¹¹Bei diesem Algorithmus wendet man Zeilen- und Spaltenumformungen auf die erweiterte Matrix $(A|I_n)$ an, um zum Endresultat $(I_n|A^{-1})$ zu gelangen.

Diagonalmatrizen sind ziemlich handlich. So sind zum Beispiel Potenzen einer Diagonalmatrix $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ einfach

$$A^k = \text{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k).$$

Das erleichtert die Berechnung von Matrixpotenzen erheblich, wenn wir mit diagonalisierbaren Matrizen arbeiten. Wenn wir nämlich eine Matrix A diagonalisieren, erhalten wir eine Diagonalmatrix $D = P^{-1}AP$. Gleichzeitig können wir A repräsentieren als $A = PDP^{-1}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \dots DP^{-1} = PD^kP^{-1}. \end{aligned}$$

Da D eine Diagonalmatrix ist, können wir ihre Potenzen direkt wie oben berechnen. Für grosse k ist diese Methode sehr viel schneller als die direkte Berechnung von A^k .

Übung 0.54. Sei $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ eine Diagonalmatrix. Zeigen Sie mit Induktion über $k \in \mathbb{N}$, dass $D^k = \text{diag}(d_1^k, \dots, d_n^k)$ gilt.

Beispiel 0.55. Stellen Sie sich nur vor, wie viel Arbeit es wäre, wenn jemand Sie bittet, eine bestimmte hohe Potenz der Matrix A aus [Beispiel 0.53](#) zu berechnen. Sie starten

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 51 & 13 \\ 52 & 12 \end{pmatrix},$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 205 & 51 \\ 204 & 52 \end{pmatrix}, \dots$$

und haben bald keine Lust mehr.

Zum Glück wissen Sie aus [Beispiel 0.53](#), dass A diagonalisierbar ist mit $D = \text{diag}(-1, 4)$. Die k -te Potenz ist schnell als $D^k = \text{diag}((-1)^k, 4^k)$ berechnet. Somit erhalten Sie

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4^{k+1} + (-1)^k & 4^k + (-1)^{k+1} \\ 4^{k+1} + 4 \cdot (-1)^{k+1} & 4^k + 4 \cdot (-1)^k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \left(4^k \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann nun ganz einfach an einem bestimmten k ausgewertet werden und Sie sind frei etwas Interessanteres zu unternehmen.

Definition 0.56. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oder $\mathbb{C}^{n \times n}$). Das *Matrixexponential* von A wird (analog zur skalaren Exponentialfunktion) durch folgende Potenzreihe definiert,

$$\exp(A) = e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{oder } \mathbb{C}^{n \times n}).$$

Das schöne ist, dass diese Reihe für alle reellwertigen (und komplexen) Matrizen konvergiert und somit das Matrixexponential immer definiert ist.

Viele Eigenschaften der gewöhnlichen Exponentialfunktion gelten auch für die Matrixexponentialfunktion.

Proposition 0.57. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (oder $\mathbb{C}^{n \times n}$) und seien $a, b \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}).

1. Sei $0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die $(n \times n)$ -Nullmatrix, dann gilt $e^0 = I_n$.
2. Es gilt $e^{aA}e^{bA} = e^{(a+b)A}$.
3. Wenn A, B kommutieren, das bedeutet $AB = BA$, dann gilt $e^{A+B} = e^Ae^B$.
4. Das Exponential von A ist immer invertierbar und die Inverse ist gegeben durch $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Aussage 4. in Proposition 0.57 besagt, dass $\exp : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, wobei $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die *allgemeine lineare Gruppe vom Grad n über \mathbb{C}* ist und alle regulären Matrizen beinhaltet, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$.

Sei ein $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad t \mapsto e^{tA}.$$

Es stellt sich heraus, dass diese Funktion eine glatte Kurve in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist und wir (komponentenweise) an einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ differenzieren können,

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A.$$

In der Tat, wir haben schon gesehen, dass das Matrixexponential wohldefiniert ist. Das bedeutet auch, dass die Potenzreihe komponentenweise konvergiert. Somit können wir die Reihenfolge der Addition und der Ableitung vertauschen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^k A^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1} A^k}{k(k-1)!} \\ &= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = A e^{tA}. \end{aligned} \tag{0.8}$$

Dieses Resultat ist sehr nützlich, wenn wir Systeme von Differentialgleichungen lösen. Betrachten Sie dazu [Satz 2.5](#).