Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst *Diagonalmatrix*, wenn alle Einträge ausserhalb der *Hauptdiagonalen* gleich 0 sind, also wenn $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$. Wir schreiben Diagonalmatrizen oftmals als

$$A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Definition 0.51. Eine quadratische Matrix A heisst *diagonalisierbar*, wenn sie *ähnlich* zu einer Diagonalmatrix ist. Das bedeutet, es existiert eine invertierbare Matrix P, sodass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

Proposition 0.52. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn die Eigenvektoren von A eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden. In diesem Fall erhalten wir P, indem wir die Eigenvektoren als Spalten von P auffassen.

Beispiel 0.53. Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ aus Beispiel 0.50. Wir haben bereits die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ mit den dazugehörigen Eigenvektoren $x_1 = (1, -4)^\intercal$ und $x_2 = (1, 1)^\intercal$ berechnet. Laut Proposition 0.52 können wir die Spalten von P durch diese Eigenvektoren definieren,

$$P = (x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet schnell, dass $\det P = 5 \neq 0$ gilt. Somit sind die Eigenvektoren linear unabhängig und P ist invertierbar.

$$(P \mid I_2) \longrightarrow (I_2 \mid P^{-1})$$

Mit dem *Gauß-Jordan-Algorithmus*[11] berechnen wir die Inverse als

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix erhalten wir nun direkt durch Multiplikation,

$$P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}}_{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Reihenfolge der Spalten in P beeinflusst die Reihenfolge der Eigenwerte in der Diagonalmatrix.

[11] Bei diesem Algorithmus wendet man Zeilen- und Spaltenumformungen auf die erweiterte Matrix $(A|I_n)$ an, um zum Endresultat $(I_n|A^{-1})$ zu gelangen.

Matrixpotenzen

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)\cdot DP^{-1} = P\cdot D^2 P^{-1}$$

Diagonalmatrizen sind ziemlich handlich. So sind zum Beispiel Potenzen einer Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$ einfach

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$A^k = \operatorname{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k)\,.$$

Das erleichtert die Berechnung von Matrixpotenzen erheblich, wenn wir mit diagonalisierbaren Matrizen arbeiten. Wenn wir nämlich eine Matrix A diagonalisieren, erhalten wir eine Diagonalmatrix $\boxed{D = P^{-1}AP.}$ Gleichzeitig können wir A repräsentieren als $\boxed{A = PDP^{-1}}$ Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \boxed{A^k} &= (PDP^{-1})^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)\cdots DP^{-1} = \boxed{PD^kP^{-1}}\,. \end{aligned}$$

Da D eine Diagonalmatrix ist, können wir ihre Potenzen direkt wie oben berechnen. Für grosse k ist diese Methode sehr viel schneller als die direkte Berechnung von A^k.

Übung 0.54. Sei $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ eine Diagonalmatrix. Zeigen Sie mit Induktion über $k \in \mathbb{N}$, dass $D^k = \operatorname{diag}(d_1^k, \ldots, d_n^k)$ gilt.

Beispiel 0.55. Stellen Sie sich nur vor, wie viel Arbeit es wäre, wenn jemand Sie bittet, eine bestimmte hohe Potenz der Matrix A aus Beispiel 0.53 zu berechnen. Sie starten

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 51 & 13 \\ 52 & 12 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 205 & 51 \\ 204 & 52 \end{pmatrix}, \ldots$$

und haben bald keine Lust mehr.

$A^{17} = ?$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix}$$

Zum Glück wissen Sie aus Beispiel 0.53, dass A diagonalisierbar ist mit $D = \operatorname{diag}(-1, 4)$. Die k-te Potenz ist schnell als $D^k = \operatorname{diag}((-1)^k, 4^k)$ berechnet. Somit erhalten Sie

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4^{k+1} + (-1)^k & 4^k + (-1)^{k+1} \\ 4^{k+1} + 4 \cdot (-1)^{k+1} & 4^k + 4 \cdot (-1)^k \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \left(4^k \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \right).$$

Dieser Ausdruck kann nun ganz einfach an einem bestimmten k ausgewertet werden und Sie sind frei etwas Interessanteres zu unternehmen.

Z.s.:

Um die Potenzen einer Matrix A zu berechnen $(A^2, A^3, \dots, A^k, \dots)$ lohnt es sich zu klären ob A diagonalisierbar ist!

$\rightarrow$ Finden Sie die Matrix P so dass: $\Rightarrow \; | \; P^{-1} A P = D$ $\quad P^{-1}$

$$\left[\; \boxed{A = P D P^{-1}} \longrightarrow A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1} \right.$$ diag.

Um die Matrix T zu finden

- <u>EW</u> von A

$$\left[\det(A - \lambda I_n) = 0 \rightarrow \dots \lambda \right]$$

- <u>EV</u> zu jedem EW λ

$$A v = \lambda \cdot v$$

- EV linear unabh. (n Stück) $P = \left(\; | \; | \; | \; | \; \right)$

Zur Erinnerung

$x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$(e = 2.718\dots)$

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$$

$e^A \rightarrow$

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$ Zahl

Definition 0.56. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (oder $\mathbb{C}^{n\times n}$). Das *Matrixexponential* von A wird (analog zur skalaren Exponentialfunktion) durch folgende Potenzreihe definiert,

Matrix Matrix

$$\exp(A) = e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad (\text{ oder } \mathbb{C}^{n\times n}).$$

Matrix $k=0$ $I_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots$

Das schöne ist, dass diese Reihe für alle reellwertigen (und komplexen) Matrizen konvergiert und somit das Matrixexponential immer definiert ist.

$$e^a = \exp(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$ a Zahl

$e^{\lambda} > 0$

Viele Eigenschaften der gewöhnlichen Exponentialfunktion gelten auch für die Matrixexponentialfunktion.

Proposition 0.57. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (oder $\mathbb{C}^{n\times n}$) und seien $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

1. Sei $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die $(n \times n)$-Nullmatrix, dann gilt $e^0 = I_n$. $= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$
2. Es gilt $e^{aA}e^{bA} = e^{(a+b)A}$.
3. Wenn A, B kommutieren, das bedeutet $AB = BA$, dann gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.
4. Das Exponential von A ist immer invertierbar und die Inverse ist gegeben durch $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

$e^{A} \cdot e^{-A} = e^{-A} \cdot e^{A} = I_n$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tx}\right) = x\, e^{tx}$$

Aussage 4. in Proposition 0.57 besagt, dass $\exp : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, wobei $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die *allgemeine lineare Gruppe vom Grad n über $\mathbb{C}$* ist und alle regulären Matrizen beinhaltet, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \det A \neq 0\}$.

Sei ein $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gegeben. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{mit} \quad t \mapsto e^{tA}\,.$$

Es stellt sich heraus, dass diese Funktion eine glatte Kurve in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist und wir (komponentenweise) an einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ differenzieren können,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A\,.$$

$$\left(e^{tA}\right)'_t = A e^{tA} \Leftarrow$$ Produkt zweier Matrizen!

optional

In der Tat, wir haben schon gesehen, dass das Matrixexponential wohldefiniert ist. Das bedeutet auch, dass die Potenzreihe komponentenweise konvergiert. Somit können wir die Reihenfolge der Addition und der Ableitung vertauschen und wir erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t^k A^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cancel{k}\,t^{k-1}A^k}{\cancel{k}(k-1)!}\\ &= A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!} = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k A^k}{k!} = Ae^{tA}\,.\end{aligned} \tag{0.8}$$

Dieses Resultat ist sehr nützlich, wenn wir Systeme von Differentialgleichungen lösen. Betrachten Sie dazu Satz 2.5.