Mathematik III
Kapitel 1: Fourierreihe

Prof. Dr. Erich Walter Farkas
http://www.math.ethz.ch/~farkas
HS 2021

ETH zürich

ETH zürich

Ein grosser Dank geht an meinen Doktoranden Alexander Smirnow, der dieses Skript mitgestaltet und übersetzt hat.

Trotz unserer Bemühungen, das Skript fehlerfrei zu halten, schleichen sich doch ab und an Fehler ein. Es ist immer eine grosse Hilfe und wir freuen uns, wenn Fehler gemeldet werden, sodass wir diese schnell beheben können.

Bitte senden Sie Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge an Alexander Smirnow (alexander.smirnow@bf.uzh.ch).

Die Fourierreihe, benannt zu Ehren von *Jean-Baptiste Joseph Fourier*, ist eine Reihe von Sinus- und Kosinusfunktionen (oder äquivalent komplexen Exponentialfunktionen), die verwendet werden kann, um periodische Funktionen darzustellen.

Es stellt sich heraus, dass viele periodische Funktionen als eine solche Reihe dargestellt werden können. Praktische Anwendungen reichen von der Signalverarbeitung, wie zum Beispiel Rauschminderung und Kompression von Musik, bis zu partiellen Differentialgleichungen.

Wie sich die Fourierreihe natürlicherweise ergibt

Die Fourierreihe wurde ursprünglich vorgeschlagen, um bestimmte Differentialgleichungen zu lösen. Im Folgenden betrachten wir, wie die bekannte *Wärmeleitungsgleichung* die Theorie der Fourierreihen motiviert.

Beispiel 1.1. Wir nehmen an, dass die Temperatur eine Funktion von Zeit und Raum ist. Wenn wir beispielsweise den Motor eines Autos einschalten, erwärmt sich das Metall mit der Zeit. Die Temperatur verändert sich jedoch nicht an allen Teilen gleichermassen, sondern hängt von der jeweiligen Stelle ab, die man betrachtet. Die Wärmeleitungsgleichung ist eine partielle Differentialgleichung, die beschreibt, wie sich die Temperatur im Laufe der Zeit ändert.

Wir werden partielle Differentialgleichungen später im Semester genauer betrachten. Hier wollen wir zeigen, woher die Idee der Fourierreihen kommt.

Wir untersuchen die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung als vereinfachtes Modell der Wärmeausbreitung in einem dünnen Metallstab der Länge $\ell > 0$.

Betrachten Sie Abbildung 1.1, wobei $u : [0, \ell] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ die Temperatur des Stabes bezeichnet.

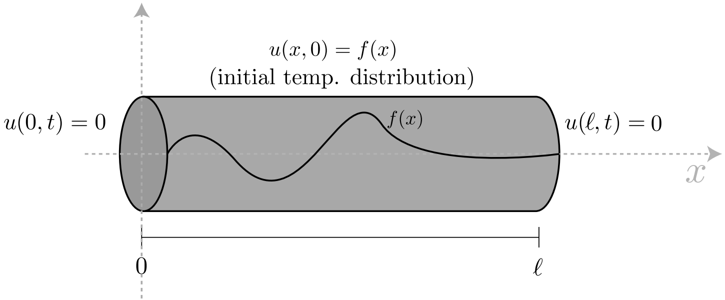


Abbildung 1.1: Idealisierte und vereinfachte Darstellung der Wärmeleitung in einem Stab mit homogenen Randbedingungen. Quelle: `https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/97/Temp_Rod_homobc.svg`

Wir nehmen an, dass u mindestens zweimal differenzierbar in x und einmal differenzierbar in t ist.

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit *(homogenen) Dirichlet-Randbedingungen* $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$ und Anfangstemperaturverteilung $u(\,\cdot\,,0) = f : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ ist für $\alpha > 0$ gegeben durch

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, \quad \text{oder kürzer:} \;\; \partial_t u = \alpha \partial_{xx} u\,.$$

Wenn $f \equiv 0$, dann ist $u \equiv 0$ eine Lösung. Diese triviale Lösung ist allerdings nicht sehr interessant für uns. Machen wir stattdessen die Annahme, dass u die Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ hat. Nach Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung, erhalten wir die Form

$$X(x)T'(t) = \alpha X''(x)T(t)\,.$$

Um dies zu vereinfachen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) annehmen, dass $\alpha = 1$ (wir können $\bar{X}(x) = X(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}x)$ substituieren, da $\alpha \neq 0$). Das ist äquivalent (angenommen, wir teilen nicht durch 0) zu

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}\,. \tag{1.1}$$

Nun ist die linke Seite von Gleichung (1.1) eine Funktion von x, wohingegen die rechte Seite nur von t abhängt. Dies ist aber nur möglich, wenn beide Ausdrücke konstant sind. Das heisst, es existiert eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$, nach Konvention mit einem Minuszeichen. Dies ergibt dann zwei gewöhnliche Differentialgleichungen,

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0\,,$$
$$T'(t) + \lambda T(t) = 0\,.$$

Wir sehen schnell ein, dass $T(t) = T_0 e^{-\lambda t}$, wobei T_0 eine Konstante ist. Wenn $T_0 = 0$, erhalten wir wiederum die triviale Lösung.

Nehmen wir also an, $T_0 \neq 0$. In diesem Fall bestimmen die Dirichlet-Randbedingungen, dass $X(0) = X(\ell) = 0$. Dies ist ein Beispiel eines *Sturm-Liouville Problems*. Hier unterscheiden wir drei Fälle, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, und $\lambda > 0$.

Es stellt sich heraus, dass der Fall $\lambda > 0$ eine nichttriviale Lösung der Form

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

hat. Mit den Randbedingungen erhalten wir $C_2 = 0$ und $C_1 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$. Die triviale Lösung mit $C_1 = 0$ interessiert uns nicht, aber wir können $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, für $n \in \mathbb{N}$, wählen. Damit erhalten wir die Lösungen

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und Konstanten C_n.

Auf ähnlich Weise erhalten wir $T_n(t) = D_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{\ell^2}\right)$, mit Konstanten D_n. Kombinieren wir T_n und X_n und setzen $b_n = C_n D_n$, erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$ die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{\ell^2}\right) ,$$

die $u_n(0,t) = u_n(\ell,t) = 0$ erfüllen. Fast haben wir es geschafft.

Bemerkung. Wir werden diese Herleitung später im Semester noch genauer betrachten. Hier geht es darum, dass wir die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung kennen.

Ein Aspekt, den wir noch gar nicht betrachtet haben, ist die Anfangstemperaturverteilung $u(\,\cdot\,,0) = f$.

Wenn wir also $t = 0$ in unsere Lösungen einsetzen, erhalten wir

$$u_n(x,0) = b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) .$$

Aber dieser Ausdruck muss für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich der Funktion f sein. Da f grundsätzlich beliebig ist und nicht unbedingt eine Sinusfunktion, haben wir ein Problem.

Dies ist der Augenblick, indem uns eine Idee kommt. Vielleicht können wir ja Koeffizienten b_n so wählen und eine Reihe von Sinusfunktionen konstruieren, dass wir genau f erhalten?

Wir erinnern uns, dass (endliche) Linearkombinationen von Lösungen ebenfalls Lösungen der Differentialgleichung sind. Wir können also versuchen, alle diese Lösungen in einer Reihe zusammenzufassen (man muss natürlich noch zeigen, dass das auch wirklich funktioniert)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{\ell^2}\right) ,$$

sodass die Anfangstemperaturverteilung f die folgende Reihe sein muss,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \stackrel{!}{=} f(x) .$$

Es stellt sich tatsächlich heraus, dass wir oft Koeffizienten b_n finden können, mit denen die Reihe konvergiert und gleich f ist. Eine solche Reihe nennen wir *Fourierreihe von f*. Der Prozess, die richtigen Koeffizienten zu finden und die Konvergenz der Reihe zu prüfen, ist Teil der Fourieranalyse.

Die Bausteine: einfache harmonische Schwingung

In Anwendungen begegnen uns oft periodische Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = A\sin(\omega x+\varphi), \tag{1.2}$$

wobei A,ω und φ Konstanten in $\mathbb{R}$ sind. Solch eine Funktion nennen wir eine *Harmonische (oder Oberschwingung) mit Amplitude $|A|$*, *(Winkel-)Frequenz ω*, und *Phase φ*. Die Periode einer solchen Harmonischen ist $P=\frac{2\pi}{\omega}$, da für jedes $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$A\sin\left(\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right) = A\sin\Big((\omega x+\varphi)+2\pi\Big) = A\sin(\omega x+\varphi)\,. \tag{1.3}$$

Die Ausdrücke *Amplitude*, *Frequenz* und *Phase* stammen ursprünglich von mechanischen Betrachtungen von *einfachen Schwingungsbewegungen*, wie zum Beispiel ein reibungsfreies Masse-Feder-System.

Der Begriff Harmonische ist streng genommen jeder Term in der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Die Reihe hat ihren Namen aus der Harmonik in der Musik, da die Obertöne einer Saite $\frac{1}{n}$ der Grundwellenlänge entsprechen.

Beispiel 1.2. Nehmen wir eine E-Saite auf einer Geige oder einer Gitarre, die eine bestimmte Grundfrequenz hat. Teilt man die Saite in zwei gleiche Teile, verdoppelt man die Grundfrequenz und erhält den zweiten Oberton, der eine Oktave höher klingt. Der dritte Oberton mit der dreifachen Grundfrequenz ergibt eine reine Quinte über dem zweiten Oberton, was in diesem Fall ein H wäre. Können Sie mit dieser Liste fortfahren?

Bemerkung. Eine Harmonische ist von einer *harmonischen Funktion* zu unterscheiden. Harmonische Funktionen sind Lösungen der Laplace-Gleichung. Dazu kommen wir später im Semester.

Wenn man einzelne Sinuskurven aus Gleichung (1.2) mit verschiedenen A, ω, φ zusammenfügt, kann man komplexe periodische Funktionen bilden. Es stellt sich heraus, dass die Summe über den Sinus zu komplizierten Berechnungen führt und dass es einfacher ist, zusätzlich den Kosinus zu berücksichtigen.

Sei $N \in \mathbb{N}$ und betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big), \tag{1.4}$$

wobei $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der konstante Term $\frac{a_0}{2}$ wird in der Elektrotechnik als Gleichstromkomponente bezeichnet, und auch hier wird der Bruch $\frac{1}{2}$ die Schreibweise vereinfachen, wenn wir die komplexe Darstellung betrachten. Man beachte, dass die Harmonischen in Gleichung (1.4) die Perioden $\frac{2\pi}{n}$ für $n \in \{1, \dots, N\}$ haben.

Übung 1.3. Zeigen Sie, dass die Summe in Gleichung (1.4) die Grundperiode 2π hat.

Eine Summe wie in Gleichung (1.4) definiert also eine Funktion der Periode 2π. Das Ziel dieses Kapitels ist es, die andere Richtung zu untersuchen:

Kann man für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Periode 2π eine Summe oder Reihe finden, die f darstellt?

Wir werden sehen, dass dies manchmal möglich ist, aber nicht immer, und natürlich auch, wie man die Koeffizienten der Reihe berechnet.

Die Länge der Periode spielt für die Darstellung keine Rolle, aber der Einfachheit halber beginnen wir mit der Periodenlänge 2π.

Was können wir mit den Bausteinen bauen?

Nehmen wir an, dass für f tatsächlich eine Darstellung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

existiert. Wir untersuchen nun, welchen Regeln diese Darstellung folgen muss. Das bedeutet, wir müssen die Koeffizienten a_0, a_n, b_n für unsere Funktion f finden.

Übung 1.4. Für die Berechnung der Koeffizienten sind die folgenden Integrale notwendig. Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen für $n, m \in \mathbb{N}$ gelten.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$
5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases}$

Was ändert sich, wenn wir $\sin(Pnx)$ und $\cos(Pnx)$ für ein $P > 0$ betrachten? Vergleichen Sie Ihre Überlegungen mit Übung 1.19.

Im ersten Schritt der Herleitung der Koeffizienten integrieren wir beide Seiten von Gleichung (1.4) über das Intervall $[0, 2\pi]$. Da das Integral linear ist, können wir die Summe und das Integral austauschen und dann Übung 1.4 verwenden, um Folgendes zu erhalten,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= a_0\pi + \sum_{n=1}^{N} a_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x}_{=0,\forall n\in\{1,\dots,N\}} + b_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x}_{=0,\forall n\in\{1,\dots,N\}} = a_0\pi\,.\end{aligned}$$

Folglich ist a_0 gegeben durch

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.5}$$

Im zweiten Schritt multiplizieren wir beide Seiten von (1.4) mit $\cos(mx)$, $m \in \{1, \ldots, N\}$, integrieren den resultierenden Ausdruck von 0 bis 2π und verwenden wieder Übung 1.4. Wir erhalten

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(mx)\,\mathrm{d}x}_{=0,\forall m\in\{1,\ldots,N\}} + \sum_{n=1}^{N} a_n \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x}_{=\pi \text{ wenn } m=n \text{ und } =0 \text{ sonst}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} b_n \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x}_{=0,\forall m,n\in\{1,\ldots,N\}}$$

$$= a_m\pi\,.$$

Somit gilt

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x, \quad \text{für } m \in \{1, \ldots, N\}\,. \tag{1.6}$$

Im letzten Schritt, wollen wir die b_m berechnen. Dazu multiplizieren wir beide Teile von Gleichung (1.4) mit $\sin(mx)$ und integrieren von 0 bis 2π,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}\sin(mx)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N} a_n \int_0^{2\pi}\cos(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N} b_n \int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= b_m\pi\,.\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x, \quad \text{für } m \in \{1,\dots,N\}\,. \tag{1.7}$$

Wir können schlussfolgern, dass, wenn eine Funktion f der Periode 2π als trigonometrische Summe (1.4) geschrieben werden kann, dann müssen die Koeffizienten durch (1.5), (1.6) und (1.7) gegeben sein.

Wir haben jedoch noch nicht die Frage beantwortet, ob alle periodischen Funktionen als eine Summe geschrieben werden können. Diese Frage wird im folgenden Abschnitt behandelt.

Fourierreihe

Für die Herleitung der Koeffizienten haben wir die Annahme getroffen, dass eine Funktion f durch eine Summe der Form (1.4) dargestellt wird. Da es sich nur um eine endliche Reihe (eine Summe) handelte, durften wir das Integral und die Summe vertauschen.

Im Allgemeinen ist dieses Vertauschen bei Reihen nicht anwendbar, sondern f muss bestimmte Bedingungen erfüllen, damit es funktioniert.

Es ist üblich

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

zu schreiben, um einen Zusammenhang zwischen der Funktion f auf der linken Seite und der Reihe auf der rechten Seite aufzuzeigen.

In unserem Fall deuten wir mit $\sim$ an, dass die Koeffizienten a_0, a_n und b_n durch die Fourier-Koeffizienten in (1.5), (1.6) und (1.7) definiert sind.

In diesem Sinne ist die Fourierreihe immer definiert, solange die Integrale existieren. *Das bedeutet jedoch nicht, dass f und die Reihe a priori gleich sind, weshalb wir auf das Gleichheitszeichen verzichten.*

Um die Konvergenz und Gleichheit genauer zu untersuchen, betrachten wir die *Partialsummen*

$$S_{f,N}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big) \, .$$

Wir wollen herausfinden, unter welchen Bedingungen und in welchem Sinne $S_{f,N}$ zu f konvergiert. Für reale Anwendungen sind wir normalerweise an punktweiser, gleichmässiger und L^p-Konvergenz interessiert.

Das folgende Ergebnis, benannt nach *Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, gibt hinreichende Bedingungen an, sodass die Fourierreihe punktweise gegen f konvergiert.

Satz 1.5. *(Dirichlet-Bedingung)* Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, die über eine Periode absolut integrierbar ist, eine endliche Anzahl von Extrema und eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen erster Art (und keine zweiter Art) in einem beliebigen Intervall besitzt, so konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ die Fourierreihe von f punktweise zum arithmetischen Mittel des linken und rechten Grenzwertes von f bei x,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} S_{f,N}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{y \downarrow x} f(y) + \lim_{y \uparrow x} f(y) \right) . \end{aligned}$$

Jede 2π-periodische Funktion, die diese Bedingungen erfüllt, kann also durch ihre Fourierreihe dargestellt werden.

Beachten Sie jedoch, dass an Unstetigkeitsstellen der Wert der Fourierreihe der Mittelpunkt der Werte an der Unstetigkeit ist. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit Abbildung 1.3.

Korollar 1.6. Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Dirichlet-Bedingungen in Satz 1.5 erfüllt und f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, dann konvergiert die Fourierreihe von f und ist gleich f.

Bemerkung 1.7. Die Dirichlet-Bedingungen sind erfüllt, wenn f *beschränkte Variation* über eine Periode hat, d.h. wenn die *totale Variation* endlich ist,

$$V_a^b(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n_P-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \infty\,,$$

wobei das Supremum über die Menge aller möglichen Partitionen $\mathcal{P}$ des Intervalls $[a, b]$ gebildet wird,

$$\mathcal{P} = \left\{ P = \{x_1, \ldots, x_{n_P}\} \;\middle|\; \begin{array}{l} P \text{ ist eine Partition von } [a,b] \text{ mit} \\ a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_P-1} < x_{n_P} = b \end{array} \right\}.$$

Wenn f differenzierbar und die Ableitung absolut integrierbar ist, dann gilt

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x\,.$$

Übung 1.8. Entscheiden Sie, ob die Fourierreihen der folgenden Funktionen konvergieren, und begründen Sie. Was geschieht an den Unstetigkeitsstellen?

1. Die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die periodische Erweiterung von der Funktion $p : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ mit $p(x) = x^4 - 2\pi^2 x^2$ ist.

2. Die Kippschwingung mit Periode 2π, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_2(x) = 2\left(\frac{x}{\pi} - \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)$.

3. Die Dreiecksschwingung mit Periode 2π, $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_3(x) = \left|2\left(\frac{x}{\pi} - \left\lfloor \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor\right)\right|$.

4. Die Reihe $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_4(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(x-2\pi n)^2}$.

5. Die Tangensfunktion $\tan : \cup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi) \to \mathbb{R}$.

Wir erhalten einen stärkeren Begriff von Konvergenz, wenn die Fourier-Koeffizienten *absolut summierbar* sind.

Proposition 1.9. Wenn die Fourierreihe punktweise gegen f konvergiert und ihre Fourier-Koeffizienten absolut summierbar sind, dann konvergiert die Fourierreihe gleichmässig.

Übung 1.10. Entscheiden Sie, ob die Fourierreihen in Übung 1.8 ebenfalls gleichmässig konvergieren.

Bisher haben wir Bedingungen für f gesehen, die die Konvergenz der Fourierreihe sicherstellen. Was aber, wenn wir eine trigonometrische Darstellung einer periodischen Funktion finden, ist sie dann notwendigerweise die Fourierreihe?

Satz 1.11. Wird eine 2π-periodische Funktion f als trigonometrische Reihe dargestellt, die gleichmässig auf $\mathbb{R}$ konvergiert, so ist diese Reihe die Fourierreihe von f.

Beweis. Wir nehmen an, dass $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$, wobei a_0, a_n, b_n "unbekannt" sind, und dass die Reihe gleichmässig konvergent ist. Da wir gleichmässige Konvergenz haben, ist die Integration der Reihe Term für Term erlaubt. In Analogie zur Herleitung der Koeffizienten erhalten wir also a_0 wie in Gleichung (1.5).

Dann multiplizieren wir beide Seiten mit $\cos(kx)$ und erhalten

$$f(x)\cos(kx) = \frac{a_0}{2}\cos(kx) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\Big)\cos(kx)\,.$$

Wir müssen zeigen, dass auch diese Reihe gleichmässig konvergiert. Da die Fourierreihe von f gleichmässig konvergiert, finden wir ein N_ϵ für jedes $\epsilon > 0$, so dass für alle $N \geq N_\epsilon$ gilt,

$$|f(x) - S_{f,N}(x)| < \epsilon\,.$$

Also gilt für alle $N \geq N_\epsilon$,

$$|f(x)\cos(kx) - S_{f,N}(x)\cos(kx)| = |f(x) - S_{f,N}(x)||\cos(kx)| < \epsilon\,,$$

und somit kann diese Reihe Term für Term integriert werden, und wir erhalten a_n wie in Gleichung (1.6). Auf ähnliche Weise können wir die Formel in Gleichung (1.7) herleiten. $\square$

Satz 1.12. Wenn eine absolut integrierbare, 2π-periodische Funktion f als eine trigonometrische Reihe dargestellt werden kann, die überall zu f konvergiert, ausser möglicherweise an endlich vielen Punkten (innerhalb einer Periode), dann ist diese Reihe die Fourierreihe von f.

Schliesslich wollen wir noch die *punktweise Konvergenz λ-fast überall* (in Bezug auf das Lebesgue-Mass λ) erwähnen.[12]

[12] In der Literatur über Masse werden Sie oft "μ-fast überall" lesen. Hierbei steht das μ stellvertretend für das verwendete Mass. Das Mass λ hingegen bezeichnet nach Konvention das Lebesgue-Mass.

Ohne hier ins Detail zu gehen, gilt für $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \,.$$

Funktionen in L^p sind bis auf Nullmengen definiert, was bedeutet, dass zwei Funktionen identisch sind, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Wir sagen, dass die beiden Funktionen *λ-fast überall* gleich sind.

Definition 1.13. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}$ ist eine *λ-Nullmenge* (eine Menge mit Lebesgue-Mass 0) genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ eine Folge von Intervallen $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, deren Vereinigung X enthält, $X \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} I_k$, sodass $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(I_k) < \epsilon$.

Beispiel 1.14.

1. Jede abzählbare Menge von $\mathbb{R}$ ist eine λ-Nullmenge. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ eine λ-Nullmenge in $\mathbb{R}$.
2. Die *Cantor-Menge* ist eine überabzählbare λ-Nullmenge in $\mathbb{R}$.

Satz 1.15. *(Carleson-Hunt)* Wenn f eine 2π-periodische Funktion in $L^p([0,2\pi])$, $p \in (1,\infty)$ ist und a_0, a_n und b_n wie oben definiert sind, dann gilt für fast jedes $x \in \mathbb{R}$ punktweise Konvergenz,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big) .$$

Für $p = 1$ ist die Aussage nicht wahr.

Übung 1.16. Diskutieren Sie kurz Übung 1.8 mit Satz 1.15.

Allgemeine periodische Funktionen und komplexe Fourier-Koeffizienten

Nun wissen wir also, wann und wie wir 2π-periodische Funktionen darstellen können. Aber können wir auch Funktionen mit beliebiger Periode P darstellen? Das folgende Lemma gibt uns eine einfache Möglichkeit, die Periode einer gegebenen periodischen Funktion zu ändern.

Lemma 1.17. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ punktweise definiert als

$$g(x) = f\left(\frac{2\pi}{P}x\right)$$

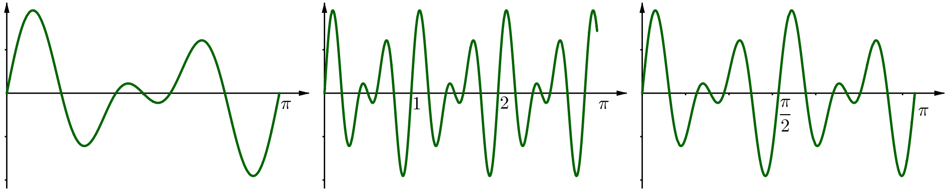
hat Periode P.

Beweis. Unter Verwendung der Periodizität von f, berechnen wir

$$g(x+P) = f\left(\frac{2\pi}{P}(x+P)\right) = f\left(\frac{2\pi}{P}x + 2\pi\right) = f\left(\frac{2\pi}{P}x\right) = g(x)\,.$$

Beispiel 1.18.

1. Betrachten wir zum Beispiel die periodische Funktion aus Abbildung 0.5. Bezeichnen wir mit f die ursprüngliche Funktion mit der Periode π. Wir können eine Funktion g der Periode 1 definieren, indem wir das Argument mit π multiplizieren, $g(x) = f(\pi x)$. Ausserdem können wir das Argument von g durch $\frac{\pi}{2}$ dividieren, $h(x) = g(\frac{2x}{\pi}) = f(2x)$, um eine Funktion der Periode $\frac{\pi}{2}$ zu erhalten.



(a) Funktion f mit Periode π

(b) Funktion g mit Periode 1 gegeben durch $g(x) = f(\pi x)$

(c) Funktion h mit Periode $\frac{\pi}{2}$ gegeben durch $h(x) = g(\frac{2x}{\pi})$

Abbildung 1.2: Illustration wie man eine Periode wechselt

2. Definieren wir die Harmonische aus (1.2) so um, dass sie die Periode 1 hat. Dazu substituieren wir x mit $\frac{2\pi}{\omega}x$ und erhalten

$$g(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}\omega x + \varphi\right) = A\sin(2\pi x + \varphi)\,.$$

3. Wir können die trigonometrische Summe in Gleichung (1.4) modifizieren, um jede gewünschte Periode zu erhalten. Zum Beispiel erhalten wir durch Übung 1.3 und Lemma 1.17, dass

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\Big(a_n\cos(2\pi nx) + b_n\sin(2\pi nx)\Big) \tag{1.8}$$

die Periode 1 hat.

Übung 1.19. In dieser Übung wollen wir die Koeffizienten (1.5), (1.6) und (1.7) für Summen beliebiger Perioden verallgemeinern. Sei $\omega_0 = \frac{2\pi}{P}$ und betrachten Sie die Summe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \Big(a_n \cos(\omega_0 nx) + b_n \sin(\omega_0 nx) \Big) .$$

Aus Übung 1.3 und Lemma 1.17 wissen wir, dass f die Periode P hat. Leiten Sie die Koeffizienten a_0, a_n und b_n für $n \in \mathbb{N}$ mit folgenden Schritten her:

1. Betrachten Sie Übung 1.4 und nehmen Sie die notwendigen Änderungen vor, um die Integrale zu berechnen.

2. Integrieren Sie f über das Intervall $[0, P]$ und zeigen Sie, dass

$$a_0 = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \mathrm{d}x \, .$$

3. Multiplizieren Sie f mit $\cos(\omega_0 n x)$ und integrieren Sie über $[0, P]$, um zu zeigen, dass

$$a_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cos(\omega_0 n x) \, \mathrm{d}x \quad \text{für } n \in \{1, \ldots, N\} \, .$$

4. Multiplizieren Sie f mit $\sin(\omega_0 n x)$ und integrieren Sie über $[0, P]$, um zu zeigen, dass

$$b_n = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \sin(\omega_0 n x) \, \mathrm{d}x, \quad \text{für } n \in \{1, \ldots, N\} \, .$$

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit Übung 1.4.

In der folgenden Übung werden Sie eine andere Version der trigonometrischen Summe unter Verwendung der Exponentialfunktion herleiten. Diese Darstellung ist einfacher und eleganter zu handhaben. Sie werden häufig die "komplexe Version" der Fourier-Koeffizienten finden, daher ist es wichtig, dass Sie sich mit dieser Version vertraut machen.

Bemerkung 1.20. Wahrscheinlich kennen Sie die *eulersche Formel* schon,

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)\,,$$

wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet.[13] Diese lässt sich umschreiben als

$$\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\,, \qquad \cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,. \tag{1.9}$$

[13] Wenn wir $x = \pi$ wählen, dann erhalten wir die *eulersche Identität, $e^{i\pi} + 1 = 0$, ein Favorit unter Mathematikern.*

Mithilfe dieser Gleichungen wollen wir die Summe in Gleichung (1.8) in folgender Form schreiben

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{2\pi i n x} \,. \tag{1.10}$$

In dieser Übung leiten Sie diese Darstellung her und zeigen, wie sich die Koeffizienten c_n zu den Koeffizienten a_0, a_n und b_n aus (1.5), (1.6) und (1.7) verhalten. Befolgen Sie diese beiden Schritte:

1. Beginnen Sie mit Gleichung (1.8) und ersetzen Sie die Sinus- und Kosinusterme durch die Ausdrücke aus Gleichung (1.9).
2. Sammeln Sie die Terme in Paaren von $e^{-2\pi i n x}$ und $e^{2\pi i n x}$ und ändern Sie dann die Grenzen der Summe so, dass es nur noch Ausdrücke $e^{2\pi i n x}$ gibt.

Zusammenfassend haben Sie gerade gezeigt, dass

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \text{ und für } n \in \{1, \dots, N\} : c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ und } c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Bemerken Sie, dass $c_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ der Durchschnitt der Funktion f über das Intervall $[0, 1]$ ist. Da die Summe in Gleichung (1.8) reell ist und $e^{-2\pi inx}$ die komplex Konjugierte von $e^{2\pi inx}$ ist, haben wir $c_{-n} = \overline{c_n}$ für alle $n \in \{1, \dots N\}$. Das heisst, wenn man c_n in der Form $\alpha + i\beta$ gefunden hat, kann man einfach das Vorzeichen des Imaginärteils ändern und erhält $c_{-n} = \alpha - i\beta$.

In ähnlicher Weise erhält man aus den komplexen Koeffizienten die reellen Koeffizienten als $a_n = c_n + c_{-n} = 2\mathrm{Re}(c_n)$ und $b_n = i(c_n - c_{-n}) = -2\mathrm{Im}(c_n)$, für $n \in \{1, \dots, N\}$.

Bemerkung 1.21. Es ist üblich, die Fourier-Koeffizienten mit $\widehat{f}(n) = c_n$ zu bezeichnen.

Gerade und ungerade Funktionen

Eine schöne Sache an geraden und ungeraden Funktionen ist, dass wir die entsprechenden Fourierreihen vereinfachen können.

Sei f eine *gerade* Funktion, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert ist (oder eine gerade periodische Funktion auf $\mathbb{R}$).

Da $x \mapsto \cos(nx)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Funktion ist, wissen wir aus Übung 0.32, dass die Funktion $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ebenfalls gerade ist.

Andererseits ist die Funktion $x \mapsto \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, ungerade, sodass auch die Funktion $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ ungerade ist.

Mit (1.6), (1.7), (0.4) und (0.5) sehen wir, dass die Fourier-Koeffizienten einer geraden Funktion f gegeben sind durch

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Somit enthält die Fourierreihe einer geraden Funktion nur *Kosinusfunktionen*,

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\,.$$

Sei f nun eine *ungerade* Funktion, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert ist (oder eine ungerade periodische Funktion auf $\mathbb{R}$).

Da $x \mapsto \cos(nx)$ eine gerade Funktion ist, ist die Funktion $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ ungerade, und da $x \mapsto \sin(nx)$ ungerade ist, ist die Funktion $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ gerade.

Mit (1.6), (1.7), (0.4) und (0.5) sehen wir also, dass die Fourier-Koeffizienten einer ungeraden Funktion f gegeben sind durch

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daher besteht die Fourierreihe einer ungeraden Funktion nur aus *Sinusfunktionen*,

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,.$$

Da die Fourierreihe einer ungeraden Funktion nur Sinusfunktionen enthält, verschwindet sie für alle Punkte $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, unabhängig von den Werten von f an diesen Punkten.

Beispiel 1.22. Betrachten wir das Rechtecksignal $f : \cup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+1) \to \{-1, 1\}$ aus Beispiel 0.27 definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } \lfloor 2x \rfloor \mod 2 = 0\,, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachten Sie, dass diese Funktion die Periode 1 hat und erinnern Sie sich an Übung 1.19. Beachten Sie, dass f ungerade ist, d.h. für alle $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+1)$ haben wir $f(x) = -f(-x)$.

Wenn wir nun annehmen, dass wir f als trigonometrische Reihe darstellen können, dann wissen wir aus der obigen Diskussion, dass $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Eine kurze Rechnung zeigt

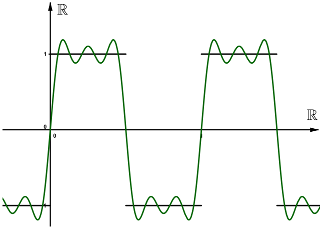
$$
\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\Big(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= 2\Big(\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{\pi n}\Big(-\cos(2\pi nx)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \cos(2\pi nx)\Big|_{\frac{1}{2}}^1\Big) \\
&= \frac{1}{\pi n}\big(2 - 2\cos(\pi n)\big) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade,} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ ungerade}\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Daher wird die Fourierreihe zu

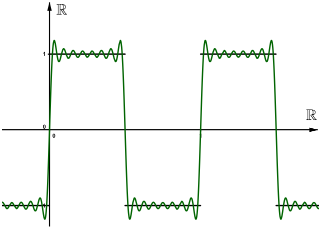
$$
4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2k+1)x)}{\pi(2k+1)}\,.
$$

Fourierreihe - Rechtecksignal

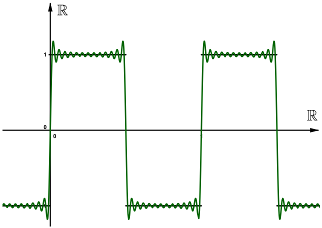
ETH zürich



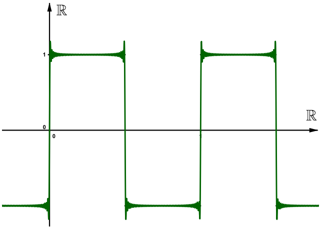
(a) Fouriersumme mit $N = 5$



(b) Fouriersumme mit $N = 15$



(c) Fouriersumme mit $N = 25$



(d) Fouriersumme mit $N = 99$

Abbildung 1.3: Annäherung an das Rechtecksignal mit Fouriersummen unterschiedlicher Länge

Für praktische Anwendungen müssen wir diese Reihe natürlich an einem bestimmten Punkt abschneiden, da wir (auf dem Computer) nicht immer weitere Terme hinzufügen können. Für die meisten Anwendungen ist dies kein Problem, da die Summe oft schnell konvergiert und wir einen kleinen (nicht signifikanten) Fehler in Kauf nehmen.

In Abbildung 1.3 sehen wir die Graphen von vier Approximationen der Rechtecksignal mit $N \in \{5, 15, 25, 99\}$.

Es ist offensichtlich, dass die Näherungen besser werden, je größer N wird. Würden Sie sagen, dass die Näherungen gut sind? Sind diese Näherungen gut genug, dass wir den Fehler als "nicht signifikant" bezeichnen können? Was fällt Ihnen an den Sprungstellen auf? Dies wird als *Gibbs'sches Phänomen* bezeichnet.

Übung 1.23. Beachten Sie, dass das Rechtecksignal streng genommen nicht ungerade ist, wenn es auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Können Sie erklären, warum? *Hinweis:* Welchen Wert muss eine ungerade Funktion bei 0 annehmen? Hat dies eine "praktische Auswirkung" auf die Fourierreihe? Definieren Sie das Rechtecksignal auf $\mathbb{R}$, sodass es eine ungerade Funktion ist.

Übung 1.24. Nachdem wir nun ein gutes Stück Theorie gesehen haben, ist es an der Zeit für einige Beispiele und schöne Visualisierungen. Schauen Sie sich das Video von *3Blue1Brown* über Fourierreihen an: `https://youtu.be/r6sGWTCMz2k`.

Sie werden vieles wiedererkennen und hoffentlich macht Ihnen die schöne Visualisierung Freude!