Mathematatik III

Kapitel 2: Systeme linearer Differentialgleichungen

Prof. Dr. Erich Walter Farkas
http://www.math.ethz.ch/∼farkas
HS 2021

Disclaimer

Ein grosser Dank geht an meinen Doktoranden Alexander Smirnow, der dieses Skript mitgestaltet und übersetzt hat.

Trotz unserer Bemühungen, das Skript fehlerfrei zu halten, schleichen sich doch ab und an Fehler ein. Es ist immer eine grosse Hilfe und wir freuen uns, wenn Fehler gemeldet werden, sodass wir diese schnell beheben können.

Bitte senden Sie Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge an Alexander Smirnow (alexander.smirnow@bf.uzh.ch).

In diesem Kapitel werden wir lernen, wie man Systeme linearer Differentialgleichungen lösen kann. Der Inhalt dieses Kapitels baut zum Teil auf den Vorlesungsnotizen von Annette A'Campo-Neuen auf.

Wir kennen schon lineare Differentialgleichungen von der Form

$$x'(t) = ax(t), \text{ für } x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R}.$$

Und wir wissen auch, dass die Lösungen durch

$$x(t) = Ce^{at} \text{ für eine Konstante } C \in \mathbb{R} \text{ gegeben sind.}$$

In der Praxis reicht das oftmals nicht aus, da wir Prozessen begegnen, die voneinander abhängig sind.

Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Unter einem *System (gekoppelter) linearer Differentialgleichungen erster Ordnung* versteht man ein System folgender Art,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t)\,, \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t)\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Koeffizienten $a_{k\ell}$ und b_k können Konstanten in $\mathbb{R}$ oder Funktionen der Zeit t sein und $x_1, \ldots, x_n$ sind die gesuchten differenzierbaren Funktionen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Koeffizienten konstant sind.

Wenn alle b_k gleich 0 sind, dann nennen wir das System *homogen*, sonst ist es *inhomogen*.

Auf den ersten Blick sieht dieses System ziemlich kompliziert aus. Das liegt daran, dass wir alle Gleichungen separat betrachten.

Wir können aber auch alle n reellwertige Funktionen $x_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als nur eine vektorwertige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ auffassen,

$$x : t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^\intercal \in \mathbb{R}^n.$$

Wenn alle x_k differenzierbar sind, dann ist auch x (komponentenweise) differenzierbar und wir schreiben $x' = (x_1', \dots, x_n')^\intercal$.

Betrachten wir (2.1) genauer. Wir bemerken, dass die Ausdrücke auf der rechten Seite so aussehen, als hätte man eine Matrix A mit einem Vektor x multipliziert und dann noch einen Vektor b addiert. Tatsächlich, wenn wir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

definieren, dann können wir das Gleichungssystem (2.1) ganz kurz schreiben,

$$x'(t) = Ax(t) + b\,.$$

Wir werden sehen, das dies nicht nur die Notation vereinfacht, sondern auch eine grosse Hilfe bei der Lösung solcher Differentialgleichungssysteme ist.

Der Einfachheit halber betrachten wir homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten, das bedeutet $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b = 0$. Somit arbeiten wir mit Gleichungen der Form

$$x'(t) = Ax(t)\,. \tag{2.2}$$

Bemerken Sie, dass für beliebige Lösungen u, v von Gleichung (2.2) alle Linearkombinationen $c_1 u + c_2 v$ auch Lösungen sind. Somit ist die Lösungsmenge von Gleichung (2.2),

$$X = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid \forall t \in \mathbb{R} :\ x'(t) = Ax(t)\}\,,$$

ein *linearer Unterraum* oder *Untervektorraum* vom Vektorraum $\mathcal{V}$ aller differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$.

In Satz 2.5 werden wir sehen, dass jedes Anfangswertproblem der Form (2.2) mit $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung in $\mathcal{V}$ besitzt. Wenn wir dieses Resultat berücksichtigen, können wir folgende Proposition beweisen.

Proposition 2.1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und
$X = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid \forall t \in \mathbb{R} : \; x'(t) = Ax(t)\}$. Dann gilt
$\dim X = \dim \mathbb{R}^n = n$.

Beweis. Wir betrachten die Projektion $X \to \mathbb{R}^n$ definiert als $x \mapsto x(0)$ (Auswertung bei 0). Diese Abbildung ist eine lineare Surjektion. Da (wie wir in Satz 2.5 sehen werden) die Lösungen eindeutig sind, ist diese Abbildung tatsächlich eine Bijektion. Somit sind X und $\mathbb{R}^n$ isomorph und es gilt $\dim X = \dim \mathbb{R}^n$. $\square$

Wir lösen Gleichung (2.2) zuerst im einfachen Fall, wenn A eine Diagonalmatrix ist. Wir wissen, dass eine Diagonalmatrix aus ihren Eigenwerten besteht und wir schreiben $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Werten wir Gleichung (2.2) aus, erhalten wir n (gewöhnliche) Differentialgleichungen der Form

$$x_k'(t) = \lambda_k x_k(t),\ k \in \{1, \ldots, n\},$$

Dieses System ist also *“entkoppelt”* und wir kennen die Lösungen schon,

$$x(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, c_n e^{\lambda_n t})^\intercal,\ \text{für beliebige Konstanten } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Tatsächlich können wir n Lösungen wählen, zum Beispiel mit $c_1 = \ldots = c_n = 1$,

$$y_1(t) = (e^{\lambda_1 t}, 0, \ldots, 0)^\intercal,\ \ldots,\ y_n(t) = (0, \ldots, 0, e^{\lambda_n t})^\intercal \in \mathbb{R}^n.$$

Diese sind linear unabhängig, da

$$\det((y_1(t)|\cdots|y_n(t))) = e^{\lambda_1 t} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_n t} \neq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Somit bilden $\{y_1, \ldots, y_n\}$ laut Proposition 2.1 eine Basis von X. In der Tat sieht man schnell, dass wir jede Lösung als Linearkombination der y_k schreiben können als $x = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ und dass, wenn $x = 0$, dann alle c_k gleich 0 sein müssen.

In diesem Zusammenhang nennen wir eine Basis auch ein *Fundamentalsystem der Differentialgleichung*.

Des Weiteren stellen wir fest, dass alle y_k von der Form $e^{\lambda_k t}\nu_k$ sind, wobei ν_k die Eigenvektoren von A sind (in diesem Fall die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$), die den Eigenwerten λ_k entsprechen. Natürlich fragen wir uns, ob das auch für beliebige Matrizen gilt. Glücklicherweise können wir dies bejahen.

Proposition 2.2. Sei $\nu \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zum Eigenwert λ. Dann erfüllt $x(t) = e^{\lambda t}\nu$ Gleichung (2.2).

Beweis. Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$Ax(t) = A(e^{\lambda t}\nu) = e^{\lambda t}A\nu = e^{\lambda t}\lambda\nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\lambda t}\nu) = x'(t)\,,$$

und somit, ist x eine Lösung. $\square$

Übung 2.3. Intuitiv wären in diesem Zusammenhang wahrscheinlich diagonalisierbare Matrizen das Nächstbeste. Erläutern Sie, was damit gemeint ist, und leiten Sie ein Fundamentalsystem von (2.2) für eine diagonalisierbare Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und entsprechenden Eigenvektoren $\nu_1, \ldots, \nu_n$ her. Verwenden Sie Proposition 2.2 und argumentieren Sie, dass $e^{\lambda_1 t}\nu_1, \ldots, e^{\lambda_n t}\nu_n$ linear unabhängig sind. Betrachten Sie auch Definition 0.51 und Proposition 0.52.

Wir werden diese Konzepte anhand eines praktischen Beispiels diskutieren.

Übung 2.4. In dieser Übung wollen wir ein Fundamentalsystem für das folgende lineare homogene Differentialgleichungssystem erster Ordnung finden,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t)\,, \\ x_2'(t) &= -3x_1(t) + 4x_2(t)\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Indem wir die folgenden Schritte befolgen, wiederholen wir viele Konzepte, die wir bisher gelernt haben.

1. Setzen Sie $x = (x_1, x_2)^\intercal$ und finden Sie eine (2×2)-Matrix A, um (2.3) in der Form $x'(t) = Ax(t)$ auszudrücken.
2. Schreiben Sie das charakteristische Polynom auf und berechnen Sie die Nullstellen, um die Eigenwerte von A zu finden. Sie sollten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ erhalten.
3. Leiten Sie die entsprechenden Eigenvektoren her und argumentieren Sie, dass diese linear unabhängig sind. Die Eigenvektoren sollten Vielfache von $v_1 = (1, 1)^\intercal$ und $v_2 = (2, 3)^\intercal$ sein.
4. Schreiben Sie das Fundamentalsystem gemäss Übung 2.3 auf. Prüfen Sie, ob tatsächlich jede Linearkombination dieses Fundamentalsystems Gleichung (2.3) löst.

Nachdem wir uns mit diagonalen und diagonalisierbaren Matrizen befasst haben, gehen wir nun zu beliebigen Matrizen über. Wie im Abschnitt über Matrixexponentiale versprochen, werden wir nun eine sehr nützliche Anwendung des Matrixexponentials beweisen.

Satz 2.5. Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Das homogene lineare Differentialgleichungssystem erster Ordnung (2.2) mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ besitzt eine eindeutige Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, die für $t \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$x(t) = e^{tA} x_0 \,.$$

Die Spalten von e^{tA} bilden ein Fundamentalsystem von (2.2).

Beweis. Sei $x(t) = e^{tA}x_0$. Wir erinnern uns, dass wir in Gleichung (0.8) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA} = Ae^{tA}$ hergeleitet haben. Das bedeutet $x'(t) = Ax(t)$. Die Anfangsbedingung ist ebenfalls erfüllt, da $x(0) = I_n x_0 = x_0$.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, dass y eine beliebige Lösung von (2.2) mit $y(0) = x_0$ ist. Wir betrachten die Abbildung $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit $t \mapsto e^{-tA}y(t)$ und berechnen ihre Ableitung,

$$c'(t) = -Ae^{-tA}y(t) + e^{-tA}y'(t) = -Ae^{-tA}y(t) + e^{-tA}Ay(t) = 0\,.$$

Die letzte Gleichheit gilt, da A und e^{-tA} kommutieren. Folglich ist die Funktion c konstant, und da y die Bedingung $y(0) = x_0$ erfüllt, haben wir für alle $t \in \mathbb{R}$

$$c(t) = c(0) = I_n x_0 = x_0\,.$$

Damit haben wir bewiesen, dass in der Tat $y = x$ gilt.

Für die letzte Behauptung bezeichnen wir die Spalten von e^{tA} mit $a_1, \ldots, a_n$. Wir stellen fest, dass die Spalten linear unabhängig sind, da laut Proposition 0.57 gilt $\det(e^{tA}) \neq 0$. Multipliziert man e^{tA} mit dem k-ten Standardbasisvektor $e_k = (0, \ldots 0, 1, 0 \ldots, 0)^\mathsf{T}$, erhält man die k-te Spalte, $e^{tA} e_k = a_k$.

Somit ist a_k eine Lösung von (2.2) mit der Anfangsbedingung $a_k(0) = e_k$, womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

Übung 2.6. Wir haben einige Teile des Beweises von Satz 2.5 ausgelassen. Überzeugen Sie sich davon, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

1. Zeigen Sie, dass e^{-tA} und A kommutieren, wobei Sie annehmen können, dass wir bereits wissen, dass e^{tA} und A kommutieren.

2. Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA}x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA})x_0$. Wie unterscheidet sich der Differentialoperator auf der linken Seite von dem auf der rechten Seite?

Übung 2.7. Wir wollen noch Behauptung 3. in Proposition 0.57 beweisen. Wir wollen zeigen, dass, wenn zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kommutieren, dann $e^{A+B} = e^A e^B$ gilt.

1. Zunächst benötigen wir ein Hilfsresultat: Wir müssen zeigen, dass, wenn A und B kommutieren, auch B und e^{tA} kommutieren.
Definieren Sie die vektorwertige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ durch $x(t) = Be^{tA}c$, für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}^n$. Die Ableitung ist durch $x'(t) = BAe^{tA}c$ gegeben. Da $AB = BA$, erhalten wir $x'(t) = ABe^{tA}c = Ax(t)$. Aber laut Satz 2.5 gilt, dass x eindeutig gegeben ist durch $x(t) = e^{tA}x(0) = e^{tA}Bc$. Folglich muss für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten, dass $Be^{tA} = e^{tA}B$.

2. Um zu zeigen, dass $e^{A+B} = e^A e^B$, definieren Sie die Funktion $x(t) = e^{tA}e^{tB}c$, für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}^n$. Gehen Sie wie im ersten Teil vor und verwenden Sie das im ersten Teil hergeleitete Ergebnis.

Beispiel 2.8. Wir wollen das Exponential der (2×2)-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ berechnen. Da diese Matrix nicht diagonalisierbar ist (man kann dies mit Proposition 0.52 überprüfen), können wir das in Kapitel 0 beschriebene Verfahren zur Berechnung der Potenzen von A nicht anwenden.

In einfachen Fällen wie diesem, können wir die Lösung jedoch manchmal "erraten". Wir berechnen einige Potenzen und schauen, ob wir ein Muster erkennen,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es scheint, dass $A^k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, für $k \in \mathbb{N}$. Wir können dies durch Induktion beweisen.

Wir haben bereits den Induktionsanfang gezeigt. Für den Induktionsschritt berechnen wir,

$$A^{k+1} = AA^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Mit diesem Resultat können wir direkt e^{tA} berechnen,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & t\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & t\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \\ 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} .$$

Übung 2.9. Berechnen Sie die Matrixexponentiale der folgenden Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{für } \lambda, a, b \in \mathbb{R}.$$

Finden Sie die Fundamentalsysteme von $x'(t) = Bx(t)$ und $x'(t) = Cx(t)$.
Tipp: Zeigen Sie durch Induktion, dass $B^k = \left(\begin{smallmatrix} 1 & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und verwenden Sie das im Abschnitt über diagonalisierbare Matrizen beschriebene Verfahren zur Berechnung von C^k.

Wie in Kapitel 0 besprochen, können wir ganz einfach Potenzen einer diagonalisierbaren Matrix A berechnen. Seien P und P^{-1} so, dass $P^{-1}AP = D$ diagonal ist. Da die Matrixexponentialfunktion eine Reihe von Potenzen ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} e^A = e^{PDP^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{PD^kP^{-1}}{k!} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}\right) P^{-1} = Pe^D P^{-1}. \end{aligned}$$

Das Exponential e^D ist leicht zu berechnen. Wenn Sie e^{tC} in Übung 2.9 berechnet haben, werden Sie dieses Resultat verwendet haben. Allerdings sind nicht alle Matrizen diagonalisierbar.

Es stellt sich heraus, dass die Diagonalform einer diagonalisierbaren Matrix ein Spezialfall der sogenannten *jordanschen Normalform* ist.

Jede Matrix, deren Eigenwerte in dem Körper liegen, über dem der Vektorraum definiert ist, weist eine solche Form auf. Zum Beispiel gibt es für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit reellen Eigenwerten eine invertierbare Matrix P, so dass $P^{-1}AP$ die folgende Form besitzt,

$$P^{-1}AP = J = J_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus J_{\lambda_r} = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_r} \end{pmatrix} .$$

Hier bezeichnet $\oplus$ die *direkte Summe* zweier Matrizen. Für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist sie definiert als

$$A \oplus B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & & \\ \hline & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}.$$

J_{λ_k} wird als *Jordanblock zum Eigenwert λ_k* bezeichnet und ist eine quadratische Matrix folgender Form,

$$J_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Jordanblöcke zu einem gegebenen Eigenwert λ_k ist gleich der *geometrischen Vielfachheit* von λ_k (die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ_k). Die Summe der Grössen aller Jordanblöcke zu einem Eigenwert λ_k, ist gleich seiner *algebraischen Vielfachheit* (Vielfachheit im charakteristischen Polynom).

Wir empfehlen Ihnen, zusätzliche Literatur über die jordansche Normalform zu lesen, da wir hier nicht ins Detail gehen können.

Die jordanche Normalform $P^{-1}AP = J$ erlaubt es uns, ähnlich wie im Fall der Diagonalisierbarkeit, das Matrixexponential zu berechnen,

$$e^A = Pe^J P^{-1}\,.$$

Es stellt sich heraus, dass e^J die direkte Summe der Exponentiale der einzelnen Blöcke ist, $e^J = e^{J_{\lambda_1}} \oplus \ldots \oplus e^{J_{\lambda_r}}$. Jeder Jordanblock hat die Form $J_k = \lambda_k I + N$, wobei N eine nilpotente Matrix der Form

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Insbesondere gilt, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $N^j = 0$ für alle $j \geq n$. Mit einer kurzen Überlegung überzeugen wir uns davon, dass $\lambda_k I$ und N kommutieren und somit laut Übung 2.7 $e^{\lambda_k I + N} = e^{\lambda_k I} e^N$ gilt. Nun lässt sich $e^{\lambda_k I}$ direkt berechnen, und da N nilpotent ist, erhalten wir hier eine Summe von Potenzen $e^N = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$.

Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 2.10. Sei $B = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ aus Übung 2.9 mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir haben schon gesehen, dass B nicht diagonalisierbar ist. Jedoch können wir B in eine jordansche Normalform bringen (mit einem einzigen Jordanblock) und wir können $B = \lambda I_2 + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \lambda I_2 + N$ schreiben. Beachten Sie, dass für $k \geq 2$ wir $N^k = 0$ erhalten. Daraus folgt,

$$e^{tB} = e^{t\lambda I_2} e^{tN} = e^{t\lambda} I_2 \left((tN)^0 + (tN)^1\right) = e^{t\lambda}(I_2 + tN) = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Lösung, die Sie in Übung 2.9 hergeleitet haben.

Übung 2.11. Betrachten Sie die folgenden Matrizen,

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 9 \\ -1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben sie so gewählt, dass $P^{-1}AP = J$ eine jordansche Normalform von A ist. Berechnen Sie e^A.

Tipp: Berechnen Sie P^{-1}, J, e^J und schliesslich e^A. Verwenden Sie zur Berechnung von e^J, dass e^J die direkte Summe der Exponentiale jedes Blocks ist, $e^J = e^{J_{\lambda_1}} \oplus \ldots \oplus e^{J_{\lambda_r}}$.

Sie sollten die folgenden Resultate erhalten,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

und für $e^A = Pe^JP^{-1}$ erhalten wir

$$e^A = \begin{pmatrix} 2e^{-2} + e - e^3 & e - e^3 & 2e^{-2} + e - 2e^3 & 3e^{-2} + e - 2e^3 \\ -2e^{-2} + e & e & -2e^{-2} + e & -3e^{-2} + e \\ e^{-2} - e + e^3 & -e + e^3 & e^{-2} - e + 2e^3 & e^{-2} - e + 2e^3 \\ -e^{-2} & 0 & -e^2 & -e^2 \end{pmatrix}.$$

Lineare Mehrkompartimentmodelle

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie Systeme linearer Differentialgleichungen entstehen. Wir werden uns auf die Herleitung der Systeme und insbesondere auf die Herleitung der entsprechenden Matrix konzentrieren.

Im Kapitel über Modelle werden wir mehr ins Detail gehen.

Im Folgenden werden wir *lineare Wechselwirkungen zwischen mehreren Kompartimenten* diskutieren. Wir gehen davon aus, dass jedem Kompartiment eine bestimmte Menge eines Medikaments oder etwas Ähnliches zugeordnet ist. Des Weiteren nehmen wir an, dass die Wechselwirkungen mit konstanten Raten ablaufen, und daher verwenden wir Konstanten, um diese darzustellen.

Wir legen hier fest, dass der erste Index die Nummer des Kompartiments bezeichnet, von dem die Menge abgezogen wird, und der zweite Index die Nummer des Kompartiments, zu dem die Menge hinzugefügt wird.

Beispiel 2.12. Seien $y_1(t)$ und $y_2(t)$ die Mengen eines Medikaments in Organen 1 und 2 zum Zeitpunkt t. Wir nehmen an, dass zum Zeitpunkt t das Medikament mit einer Rate $M(t)$ in Organ 1 eingebracht wird, wo sie mit einer konstanten Rate a_1 abgebaut wird und mit einer Rate b_{12} an Organ 2 weitergegeben wird. In Organ 2 wird das Medikament mit der Rate a_2 abgebaut und mit der Rate b_{21} an Organ 1 zurückgegeben. Wir können diese Beziehungen in folgendem Diagramm visualisieren.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Menge} & y_1(t) & y_2(t) & \\
M(t) \arrow[r] & \text{Organ 1} \arrow[r, bend right, "b_{12}"'] \arrow[d] & \text{Organ 2} \arrow[l, bend right, "b_{21}"'] \arrow[r] & a_2 \\
& a_1 & &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 2.1: Beispiel eines linearen Mehrkompartimentmodells.

Aus Abbildung 2.1 können wir direkt die zwei Differentialgleichungen herleiten,

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= M(t) - (a_1 + b_{12})y_1(t) + b_{21}y_2(t)\,, \\ y_2'(t) &= b_{12}y_1(t) - (b_{21} + a_2)y_2(t)\,. \end{aligned}$$

Wenn wir $y = (y_1, y_2)^\mathsf{T}$, $y' = (y_1', y_2')^\mathsf{T}$, $g = (M, 0)^\mathsf{T}$ und

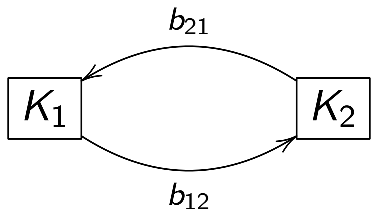
$$A = \begin{pmatrix} -(a_1 + b_{12}) & b_{21} \\ b_{12} & -(b_{21} + a_2) \end{pmatrix}$$

definieren, können wir das System in Matrixnotation notieren,

$$y'(t) = Ay(t) + g(t)\,.$$

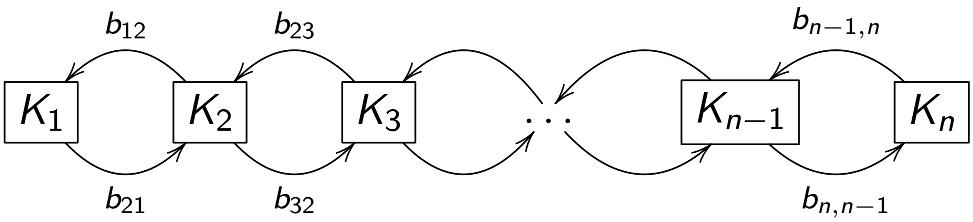
Mit den Resultaten aus den vorangegangenen Abschnitten können Sie dies bereits für $M \equiv 0$ lösen.

Übung 2.13. Betrachten Sie das folgende 2-Kompartimentmodell. Nehmen Sie an, dass zum Zeitpunkt t die entsprechende Menge eines Medikaments in Kompartiment K_j, für $j \in \{1, 2\}$, $y_j(t)$ beträgt.



Schreiben Sie das System der Differentialgleichungen, das dieses Modell darstellt, in Matrixschreibweise auf. Lösen Sie dieses System für $b_{12} = b_{21} = 1$.

Übung 2.14. Betrachten Sie folgendes Modell.



Leiten Sie das Differentialgleichungssystem und die dazugehörige Matrix her.

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

In diesem Abschnitt betrachten wir eine einzelne *Differentialgleichung n-ter Ordnung*. Interessanterweise können wir diese Gleichung in ein System von Gleichungen erster Ordnung überführen. Betrachten wir die folgende homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung,

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0 \,. \tag{2.4}$$

Um n Differentialgleichungen erster Ordnung zu erzeugen, definieren wir die vektorwertige Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ als $y = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})^\mathsf{T}$. Überzeugen Sie sich, dass, wenn x Gleichung (2.4) erfüllt, y eine Lösung des folgenden Systems ist

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t)\,, \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(t) &= y_n(t)\,, \\ y_n'(t) &= -a_0 y_1(t) - a_1 y_2(t) - \ldots - a_{n-1} y_n(t)\,. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die letzte Gleichung genau Gleichung (2.4) ist. Wir können nun die Koeffizienten dieses Systems in einer Matrix zusammenfassen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

und somit erhalten wir das System

$$y'(t) = Ay(t)\,.$$

Analog zum Abschnitt über Systeme linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, müssen wir die Eigenwerte von A finden. Wir wollen also das charakteristische Polynom von A herleiten. Wir werden feststellen, dass es gegeben ist durch

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\,. \tag{2.5}$$

Um dies zu zeigen, benutzen wir Induktion über n.

Für $n = 1$, erhalten wir $x^{(1)} + a_0 x = 0$ und damit $A = -a_0 \in \mathbb{R}$. Folglich gilt

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda - (-a_0)) = \lambda + a_0 \,. \qquad \checkmark$$

Für den Induktionsschritt $n \to n + 1$ nehmen wir an, dass Gleichung (2.5) gilt.

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz über die erste Spalte erhalten wir

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(\lambda I_{n+1} - A) \\
&= (-1)^2 \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ a_0 & \cdots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{vmatrix} \\
&\qquad + (-1)^{n+2} a_0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & -1 \\ a_0 & \cdots & a_{n-1} & \lambda + a_n \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \lambda + a_1) + (-1)^{n+2+n} a_0 \\
&= \lambda^{n+1} + a_n \lambda^n + \ldots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 \, .
\end{aligned}
$$

Wir bemerken, dass das charakteristische Polynom (2.5) der Differentialgleichung (2.4) ähnelt. Daher nennen wir dieses Polynom das *charakteristische Polynom der Differentialgleichung* und A (oder häufiger die Transponierte) die *(Frobenius-)Begleitmatrix* zu diesem Polynom.

Analog zum vorherigen Abschnitt wissen wir, dass die Lösungsmenge ein n-dimensionaler Vektorraum ist, also gilt dasselbe für die Lösungsmenge von (2.4). Wir übernehmen die gleiche Terminologie und nennen eine Menge von Funktionen $\{y_1, \dots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem, wenn

$$Y_1 = \left(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right)^\mathsf{T}, \dots, Y_n = \left(y_n, y_n', \dots, y_n^{(n-1)}\right)^\mathsf{T}$$

eine Basis der Lösungsmenge des entsprechenden Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung ist.

Um die lineare Unabhängigkeit zu prüfen, berechnen wir die so genannte *Wronski-Determinante*,

$$W_{Y_1,\ldots,Y_n}(t) = \det((Y_1|\cdots|Y_n)) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Um Lösungen zu finden, haben wir folgendes sehr nützliches Ergebnis.

Satz 2.15. Sei p das charakteristische Polynom in (2.5) mit reellen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ und Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$. Dann bilden für $j \in \{1, \ldots, r\}$ und $k \in \{0, \ldots, m_r - 1\}$ die Funktionen $t^k e^{\lambda_j t}$ ein Fundamentalsystem von (2.4).

Wenn die Menge der Nullstellen ein Paar komplex konjugierter Zahlen $\lambda = a + ib$ und $\bar{\lambda} = a - ib$ mit Vielfachheit m aufweist, dann sind für $k \in \{0, \ldots, m - 1\}$ die Funktionen $t^k e^{at} \cos(bt)$ und $t^k e^{at} \sin(bt)$ linear unabhängige Lösungen von (2.4).

Beispiel 2.16. Betrachten Sie folgende Differentialgleichung

$$x^{(3)} - 2x^{(2)} - x^{(1)} + 2x = 0\,.$$

Das dazugehörige charakteristische Polynom ist
$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$. Die Nullstellen sind also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$, und somit gilt laut Satz 2.15, dass

$$x_1(t) = e^t\,,\;\; x_2(t) = e^{-t}\,,\text{ and }\; x_3(t) = e^{2t}$$

ein Fundamentalsystem ist.

In der Tat, die Lösungen

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_1'' \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\;\; X_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\text{ und }\; X_3 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sind Eigenvektoren der Begleitmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Übung 2.17. Leiten Sie ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichungen her,

1. $x^{(3)} - 5x^{(2)} + 3x^{(1)} + 9x = 0,$
2. $x^{(2)} + x = 0.$

Schreiben Sie dazu die charakteristischen Polynome auf und faktorisieren Sie sie, um ihre Nullstellen zu finden. Verwenden Sie dann Satz 2.15.

Lösung. Für die erste Differentialgleichung erhalten wir das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)^2 .$$

Nach Satz 2.15 ist

$$x_1(t) = e^{-t} , \quad x_2(t) = e^{3t} , \quad x_3(t) = te^{3t} .$$

ein Fundamentalsystem.

Aus der zweiten Differentialgleichung ergibt sich das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i) .$$

Daher ist nach Satz 2.15

$$x_1(t) = \cos(t) , \quad x_2(t) = \sin(t) .$$

ein Fundamentalsystem.