

Mo, 29. Nov. 2021

## Mathematik III

### Kapitel 5: Partielle Differentialgleichungen

---

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

<http://www.math.ethz.ch/~farkas>

HS 2021

**ETH** zürich

5.1. Partielle Differentialgleichungen - Einführung

5.2. Wärmeleitungsgleichung / Diffusionsgleichung



5.3. PDEs lösen

5.4. Laplace-Gleichung



Ein grosser Dank geht an meinen Doktoranden Alexander Smirnow, der dieses Skript mitgestaltet und übersetzt hat. Des Weiteren bedanken wir uns bei Philipp Zimmermann für hilfreiche Kommentare und Verbesserungsvorschläge.

Trotz unserer Bemühungen, das Skript fehlerfrei zu halten, schleichen sich doch ab und an Fehler ein. Es ist immer eine grosse Hilfe und wir freuen uns, wenn Fehler gemeldet werden, sodass wir diese schnell beheben können.

Bitte senden Sie Fehlermeldungen und Verbesserungsvorschläge an Alexander Smirnow ([alexander.smirnow@bf.uzh.ch](mailto:alexander.smirnow@bf.uzh.ch)).

# Partielle Differentialgleichungen - Einführung

---

$$x \mapsto f \rightarrow y(x)$$

Wir haben bereits *gewöhnliche Differentialgleichungen* (GDGL, englisch: *ODE*) gesehen. Sie bestehen aus einer Funktion, ihren Ableitungen und *einer unabhängigen Variablen*.

**Bemerkung 5.1.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine stetige Funktion. Dann ist

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

eine *gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung*.

Partielle Differentialgleichungen hingegen stellen Beziehungen zwischen partiellen Ableitungen einer mehrdimensionaler Funktionen her.

$$y'' + 3y' - xy = 0$$

Wir führen zuerst einige Notationen ein. Sei  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Es gibt viele Schreibweisen für partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \partial_{x_k} u = u_{x_k} = \partial_k u = u_k, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Wir werden meistens die Schreibweise  $\partial_{x_k} u$  verwenden, als Kompromiss zwischen präzise und wenig Schreibarbeit.

Des Weiteren definieren wir

$$\nabla u(x) = (\partial_{x_1} u(x), \dots, \partial_{x_n} u(x))^T \quad \text{und} \quad \Delta u(x) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k x_k} u(x).$$

Für einen *Multiindex*  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  definieren wir  $|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$  und

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{sowie} \quad D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\}$$

$$\alpha = (1, 0, 1, 2)$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} u \right)$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow u(x_1, x_2, x_3)$$

$$\nabla u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$


---

$$(x, y) \longrightarrow u(x, y)$$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\text{Bsp: } (x_1, x_2, x_3) \mapsto u(x_1, x_2, x_3)$$

$$\alpha = (2, 1, 1) \quad |\alpha| = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^4 u}{2x_1^2 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} u \right) \right)$$

$$D^{\alpha} \text{Not } \} D^{\alpha} u : |\alpha| = 2 \}$$

$$|\alpha| = 2: \quad (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2), \\ (1, 1, 0); (1, 0, 1)$$

$$(0, 1, 1),$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto u = ?$$

**Definition 5.2.** Sei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Eine *partielle Differentialgleichung k-ter Ordnung*,  $k \in \mathbb{N}$ , ist eine Gleichung der Form

$$F(x, u, Du, D^2u, \dots, D^k u) = 0,$$

wobei  $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n^k} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion ist.

Unser Ziel ist es,  $k$ -mal stetig differenzierbare Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zu finden, die diese Gleichung punktweise erfüllen.

**Bemerkung 5.3.** Der Differentialoperator  $\nabla$  wird als Nabla (im Englischen auch *del*) ausgesprochen und  $\nabla u = Du$  ist der *Gradient* von  $u$ . Der Laplace-Operator  $\Delta$  ist der reguläre Grossbuchstabe Delta.

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

**Beispiel 5.4.** Beispiele für partielle Differentialgleichungen sind

$$1. uu_x + u_y = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^2,$$

$$2. |\nabla u|^2 = 1 \text{ auf } \mathbb{R}^n, n \geq 1,$$

$$3. \Delta u = u_x \text{ auf } \mathbb{R}^2,$$

$$4. x^2 u_{xyy} = y + \sin(u_y) \text{ auf } \mathbb{R}^2.$$

$$(x, y) \mapsto u(x, y)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = u_x$$

$$\begin{aligned} h_x &= D^d u \\ d &= (h, 0) \\ u_y &= D^d u \\ x &= (0, 1) \end{aligned}$$

Wie Sie sich vorstellen können, ist es nicht einfach, Lösungen zu finden. Im Folgenden werden wir uns Beispiele ansehen und Wege zur Lösung einiger partieller Differentialgleichungen finden.

**Übung 5.5.** Zeigen Sie, dass die Funktion  $u$  gegeben durch  $u(x, y) = \frac{x}{1+y}$  eine Lösung der ersten PDE von **Beispiel 5.4** ist. Was ist der Definitionsbereich von  $u$ ? Können Sie andere Lösungen finden, indem Sie geschickt eine Konstante in  $u$  einfügen?

$$u_x = \frac{1}{1+y} \quad ; \quad u_y = x \cdot \frac{-1}{(1+y)^2}$$

$$2) \nabla u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_n} u \end{pmatrix}$$

$$|\nabla u| = \sqrt{|\partial_{x_1} u|^2 + |\partial_{x_2} u|^2 + \dots + |\partial_{x_n} u|^2}$$

$$3) \Delta u = u_x \quad ; \quad (x, y) \mapsto u(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = u_x$$

Wir können PDEs klassifizieren anhand

- ▷ ihrer Ordnung,
- ▷ ihrer Linearitätseigenschaft (linear oder nichtlinear),
- ▷ ihrer Homogenitätseigenschaft (homogen oder inhomogen).

**Beispiel 5.6.** In [Beispiel 5.4](#)

- ▷ sind die erste und zweite PDE von der Ordnung 1, die dritte von der Ordnung 2 und die letzte von der Ordnung 3,
- ▷ ist die dritte PDE linear, während die anderen nichtlinear sind,
- ▷ sind die erste und dritte PDE homogen, während die zweite und vierte inhomogen sind.

Für den Spezialfall linearer PDEs zweiter Ordnung unterscheiden wir (wie bei den quadratischen Formen) zwischen

- ▷ *elliptischen* PDEs, wie zum Beispiel der *Laplace-Gleichung*,
- ▷ *parabolischen* PDEs, wie zum Beispiel der *Wärmeleitungsgleichung*,  
und
- ▷ *hyperbolischen* PDEs wie zum Beispiel der *Wellengleichung*.



Analog zu ODEs ist die Summe der Lösungen einer linearen homogenen PDE ebenfalls eine Lösung. Dies wird als *Superpositionsprinzip* bezeichnet.

Genauer, sei  $L$  ein linearer Differentialoperator der Form

$$L = \sum_{k=1}^n a_k^{(1)}(x) \partial_{x_k} + \sum_{k,\ell=1}^n a_{k,\ell}^{(2)}(x) \partial_{x_k x_\ell} + \dots,$$

dann gilt

$$Lu = \sum_{k=1}^n a_k^{(1)}(x) \cdot \partial_{x_k} u$$

$L[u_j] = 0, j \in \{1, 2\}$  impliziert  $L[c_1 u_1 + c_2 u_2] = 0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**Übung 5.7.** Der Differentialoperator  $L = \partial_{xx} + \partial_{yy} - \partial_x$  entspricht einer der PDEs in [Beispiel 5.4](#). Welche ist es?

$$Lu = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u - \partial_x u$$

In Anwendungen suchen wir oft nach Lösungen für eine PDE unter bestimmten Anfangs- und Randwerten. Ein solches Anfangs-Randwert-Problem könnte wie folgt aussehen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$L = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$$

$$\Delta u(x, y) = 0 \text{ in } \Omega = (0, 1)^2$$

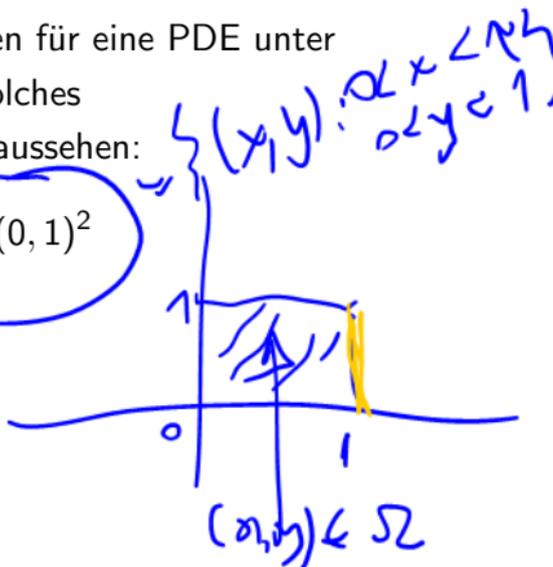
$$u(x, 0) = 0$$

$$u(x, 1) = 0$$

$$u(0, y) = 0$$

$$u(1, y) = \sin^2(\pi y).$$

$x \rightarrow$



Im Gegensatz zu ODEs sind die Randbedingungen von PDEs Funktionen auf Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  mit "kleinerer Dimension".

In diesem Beispiel ist die Funktion  $u|_{\partial\Omega} =: f$  auf dem Rand

$\partial\Omega = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\})$  gegeben, eine eindimensionale Menge (Kurve) im  $\mathbb{R}^2$ .

In dieser Vorlesung werden wir hauptsächlich lineare PDEs bis zur zweiten Ordnung diskutieren. Wichtige Beispiele sind

▷ *Laplace-Gleichung*:  $\Delta u(x) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k x_k} u = 0$ , elektrostatisches Potential ohne Ladungen oder Gravitationspotential ohne Massen,

▷ *Poisson-Gleichung*:  $\Delta u(x) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k x_k} u = f$ , elektrostatisches Potential mit Ladungsdichte  $f$  oder Gravitationspotential mit Massendichte  $f$ ,

▷ *Wärmeleitungsgleichung / Diffusionsgleichung*:

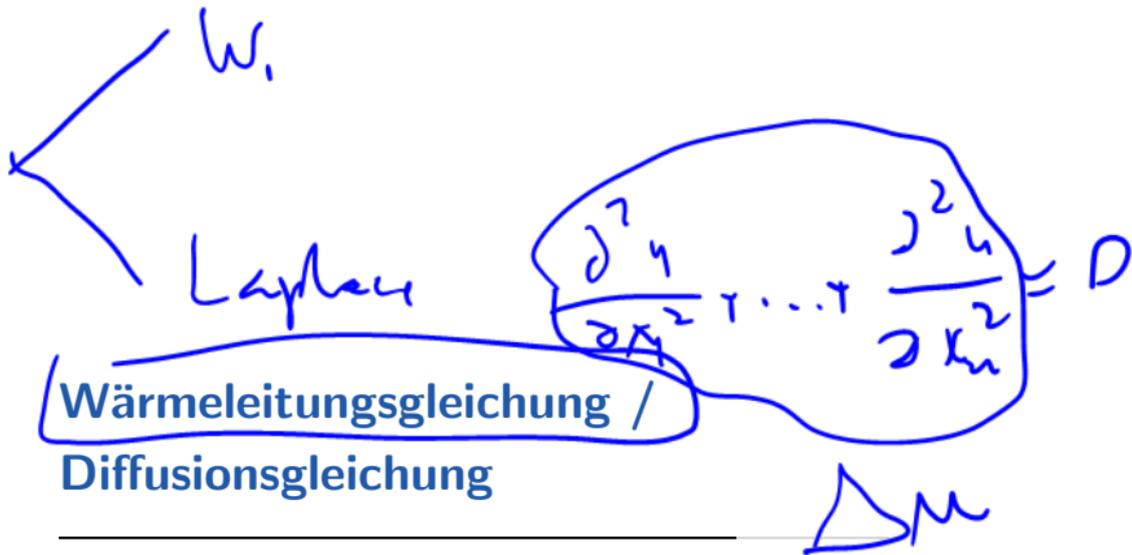
$\partial_t u(x, t) - a \Delta u(x, t) = 0$ , mit Temperaturleitfähigkeit  $a > 0$ .

▷ *Wellengleichung*:  $\frac{1}{c^2} \partial_{tt} u(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$ , wobei  $c > 0$  die Phasengeschwindigkeit der Welle ist,

▷ *Schrödingergleichung*:  $(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x))u(x, t) = i\hbar \partial_t u(x, t)$ , wobei  $\hbar$  das *reduzierte Plancksche Wirkungsquantum* oder *Planck-Konstante* ist,  $m > 0$  die Masse des Teilchens, und  $V$  ein Potential ist.

$\partial_{x_1 x_1} + \partial_{x_2 x_2} + \dots + \partial_{x_n x_n} (t, x) = \Delta u(t, x)$

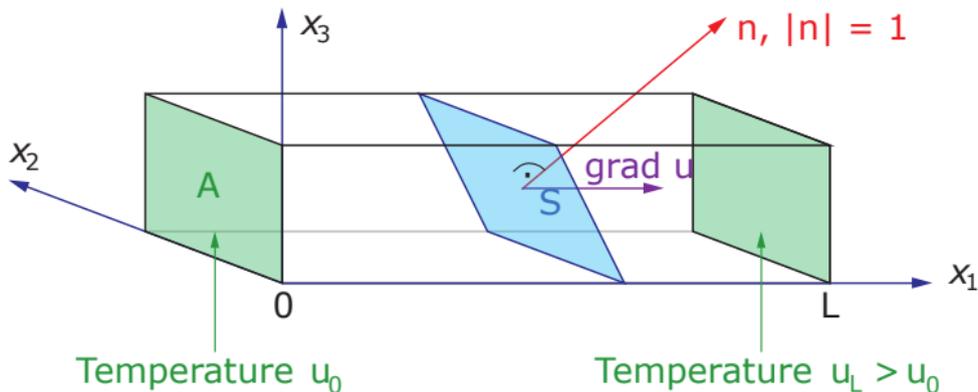




Sei  $u(x, t)$  die Temperatur (oder die Dichte des Diffusionsmaterials) zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  und am Ort  $x$  innerhalb eines Mediums  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Wie fließt nun die Wärme durch unser Medium?

**Modell.** Wir richten die  $x_1$ -Achse in Richtung  $\nabla u$  aus.



oft

Die Wärmemenge, die sich pro Zeiteinheit durch den Stab der Länge  $L$  von rechts nach links bewegt, ist proportional zur Querschnittsfläche  $A$  und zur Temperaturdifferenz  $u_L - u_0$ , und ist invers proportional zu  $L$ .

Wir können dies durch den folgenden Quotienten beschreiben,

$$\frac{dW}{dt} = k \frac{u_L - u_0}{L} A.$$

Die Konstante  $k$  ist die *Wärmeleitfähigkeit* des Materials. Die Richtung des Wärmestroms wird durch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik beschrieben.

Wir stellen uns nun eine geneigte Fläche  $S$  vor. Für (sehr kleine)  $L$  approximiert der Quotient der Differenzen die partielle Ableitung von  $u$  nach  $x_1$ , daher erhalten wir

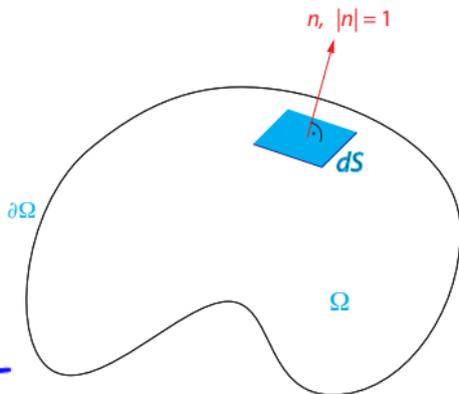
opt

$$\frac{dW}{dt} = k \nabla u \cdot n S.$$

Dies ist das Negativ der Wärmemenge, die sich durch  $S$  in Richtung  $n$  bewegt.

Im Allgemeinen ist der Wärmestrom durch  $\partial\Omega$  nach aussen gegeben durch

$$\phi(\partial\Omega) = - \int_{\partial\Omega} k \nabla u \cdot n \, dS.$$





Die Wärmeenergie pro Masseneinheit ist proportional zur Temperatur.  
Daher ist die Menge der thermischen Energie in  $\Omega$  gegeben durch

$$W(\Omega) = \int_{\Omega} cu\rho dV,$$

wobei  $c$  die *spezifische Wärmekapazität* pro Masseneinheit des Materials  
und  $\rho$  die *Dichte* ist.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \frac{dW(\Omega)}{dt} &= \int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t} \rho \, dV = -\phi(\partial\Omega) = \\
 &= \int_{\partial\Omega} k \nabla u \cdot n \, dS \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\Omega} \text{div}(k \nabla u) \, dV.
 \end{aligned}$$

*gta*

Diese Gleichung gilt für beliebige  $\Omega$  und daher müssen die blauen Integranden gleich sein:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \nabla u).$$

Wenn  $k$  konstant ist, erhalten wir mit  $D := \frac{k}{c\rho} > 0$  die Wärmeleitungsgleichung (bzw. die Diffusionsgleichung),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u.$$

*(t, x) → M(k, ρ)*

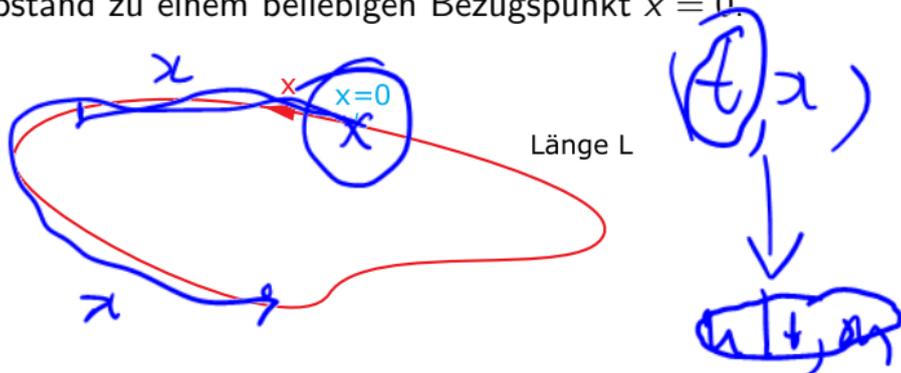
↓ ! Dies bitte lesen!

**PDEs lösen**

---

Di, 30. 11. 2021

**Beispiel 5.8.** (*Wärmeleitgleichung in einem geschlossenen Draht*) Stellen Sie sich einen Draht der Länge  $L$  vor. Wir messen die Position  $x$  auf dem Draht als den Abstand zu einem beliebigen Bezugspunkt  $x = 0$ .



Zu Beginn wird die eine Hälfte des Drahtes in warmes Wasser mit der Temperatur 1 getaucht, der Rest hat die Temperatur 0. Bei  $t = 0$  nehmen wir den Draht aus dem warmen Wasser. Wir wollen nun die resultierende Wärmeverteilung wissen.

$$\partial_t u = D \cdot \Delta u$$

$u(x,t)$   
 $u(t,x)$

Wir müssen also Folgendes lösen

(PDE)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

für  $x \in \mathbb{R}, t > 0$

(AB)

$$u(x, 0) = u_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in [0, \frac{L}{2}] \\ 0 & \text{wenn } x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$$

für  $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$

(RB)

$$u(x+L, t) = u(x, t)$$

$$f(x+1) = f(x)$$

$t=0$

$$x \in [0, \frac{L}{2}] = [0, \frac{L}{2}[$$

# 1. Schritt: Separation der Variablen

Ansatz: Wir suchen nach Lösungen der Form

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

▷ Setzt man diesen Ausdruck in die PDE ein, erhält man

$$\dot{T}X = DX''T$$

▷ Teilt man nun beide Seiten durch  $DXT$ , erhält man

$$\frac{1}{D} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ . (5.1)

Wir haben es geschafft, die Variablen  $x$  und  $t$  zu trennen.  $\rightarrow = \kappa$

Aus dieser Form geht hervor, dass, wenn man zuerst  $x$  und dann  $t$  fixiert, beide Seiten von Gleichung (5.1) gleich einer Konstanten  $\kappa$  sein müssen.

Dies bedeutet, dass die folgenden ODEs gelten müssen,

$$\dot{T} = \kappa DT, \quad (5.2)$$

$$X'' = \kappa X. \quad (5.3)$$

$\dot{T}(t) = T'(t)$   
 $\frac{\partial u}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t)$

$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\|X'' = \kappa X \Rightarrow X'' - \kappa X = 0$$

▷ Für  $\kappa \geq 0$  hat Gleichung (5.3) nur eine periodische Lösung,  $X \equiv 0$

▷ Für  $\kappa := -\omega^2 < 0$  hat Gleichung (5.3) die periodische Lösung

$$X(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x).$$

▷ Wir erhalten die Periode  $L$  genau dann, wenn  $\omega = \omega_n := \frac{2\pi n}{L}$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ .

$$X(x+L) = X(x)$$

Dies bedeutet, dass alle  $L$ -periodischen Lösungen von Gleichung (5.3) gegeben sind durch

$$X_n(x) = A_n \cos(\omega_n x) + B_n \sin(\omega_n x).$$

$$\cos(\omega_n x) = \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{L} (x+L)\right) = \cos\left(\frac{2\pi n}{L} x + 2\pi n\right)$$

# 1. Schritt: Separation der Variablen

$$\dot{T}(t) = D \cdot K \cdot T, \quad \boxed{K = -\omega_n^2} < 0$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir die Lösungen für Gleichung (5.2) für

$n \in \mathbb{N}_0$  als

$$\frac{dT}{dt} = D \cdot K \cdot T \Leftrightarrow \frac{dT}{T} = D \cdot K dt$$

$T_n(t) = \exp(-D\omega_n^2 t)$

$$\int \frac{dT}{T} = \int D \cdot K dt \Rightarrow \log T(t) = D \cdot K \cdot t + C$$

Die Lösungen der (PDE) in Abhängigkeit von (RB) sind also die Funktionen



$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$$

$$= (A_n \cos(\omega_n x) + B_n \sin(\omega_n x)) \exp(-D\omega_n^2 t)$$

$$K = -\omega_n^2$$

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{L}$$

Wir nennen sie *Fundamentallösungen*.

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

## 2. Schritt: Superposition

Wir bemerken, dass

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- ▷ (PDE) linear und homogen ist, und somit
- ▷ alle Linearkombinationen der Fundamentallösungen auch Lösungen sind. Die Reihe

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right) \exp\left(-D \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}t\right)$$

für beliebige  $A_n, B_n$ , falls konvergent, ist eine Lösung von (PDE) unter der Bedingung (RB).

**Idee:** Wir wählen die Koeffizienten  $A_n, B_n$  so, dass (AB) erfüllt ist. Dies bedeutet

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \right) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$

Für alle  $x$

## 2. Schritt: Superposition

Dies gilt aber nur, wenn  $A_n, B_n$  die Fourierkoeffizienten von  $u_0$  sind:

$$A_0 = \frac{1}{2},$$

$$A_n = 0 \text{ für } n \geq 1,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi}$$

wenn  $n$  ungerade ist,

$B_n = 0$  wenn  $n$  gerade ist.

Rechnung  $u_0 = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < L/2 \\ 0 & L/2 \leq x < L \end{cases}$

Setzt man diese Koeffizienten ein, erhält man schliesslich

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) \exp\left(-D \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}t\right).$$

**Bemerkung:** Wir sehen, dass  $u(x, t)$  mit  $t \rightarrow \infty$  gegen die stationäre (d.h. zeitunabhängige) Lösung von (PDE) und (RB) konvergiert,

$$A_0 = \frac{1}{2}$$

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L u_0(x) dx.$$

M., 6.12.

## Lernen:

- Separation: mache  $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$
- Gleichung für  $T \rightarrow$  lösbar  
↓  
für  $X \rightarrow$  lösbar }  $\underline{T+D}$
- Berücksichtigen:  $\omega$  periodisch in  $x$ !

$$\boxed{\kappa < 0}$$



$$X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \quad \left. \begin{array}{l} t=0 \\ \text{F.R.} \end{array} \right\}$$

# A-priori Aussagen über die Lösung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdot u(x, 0) = u_0(x)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = u(x, t)$$

Auch ohne eine explizite Formel können wir einige Informationen über die Lösung herleiten:

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} dx = D \cdot \int_0^L u_{xx} dx$$

▷ Integriert man die PDE bezüglich  $x$  von 0 bis  $L$ , so erhält man

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u dx = \int_0^L u_{xx} dx = 0$$

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(u_x) dx$$

Das bedeutet, dass die Menge an Wärmeenergie im Draht über die Zeit konstant ist,

$$\left( \int_0^L f' dx = f \Big|_0^L \right)$$

$$\int_0^L u(x, t) dx \text{ ist konstant,}$$

$$u_x \Big|_0^L = 0$$

was plausibel ist, da wir weder Energie hinzufügen noch abführen.

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^L n(x,t) dx \right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^L n(x,t) dx = \text{const.}$$

$$\boxed{J=1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} \sim \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

$$n \cdot \frac{\partial n}{\partial t} = n \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \Rightarrow \int_0^L n \cdot n_t = \int_0^L n \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

- ▷ Multipliziert man die PDE mit  $u$  und integriert dann bezüglich  $x$  von 0 bis  $L$ , so erhält man

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx = \int_0^L uu_t dx = \int_0^L uu_{xx} dx \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} - \int_0^L u_x^2 dx \leq 0.$$

Das bedeutet, dass  $\int_0^L u^2(x, t) dx$  monoton fallend in  $t$  ist.

- ▷ Multipliziert man die PDE mit  $\ln u$  und integriert dann bezüglich  $x$  von 0 bis  $L$ , so erhält man

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u \ln u dx = \frac{d}{dt} \int_0^L (u \ln u - u) dx = \int_0^L u_t \ln u dx$$

$$= \int_0^L u_{xx} \ln u dx \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} - \int_0^L \frac{u_x^2}{u} dx \leq 0.$$

Das bedeutet, dass die Entropie monoton steigend in  $t$  ist.

$$\int_0^L u \cdot u_{xx} dx = \int_0^L u \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(u_x)}_{v'} dx =$$

$$= u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx =$$

$$\underbrace{u}_{\text{Zwischen}} \quad 0 - \underbrace{\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx}_{\geq 0} \leq 0$$

- ▷ Betrachten Sie  $v(x, t) := u(x, t) - \varepsilon t$ ,  $\varepsilon > 0$  und fixieren Sie ein  $t_0 > 0$ . Nehmen Sie an, dass  $v$  ein Maximum bei  $x_0$  annimmt,

$$v(x_0, t_0) = \max_{x \in [0, L]} v(x, t_0).$$

Das bedeutet, dass

$$0 \geq v_{xx}(x_0, t_0) = u_{xx}(x_0, t_0) = u_t(x_0, t_0) = v_t(x_0, t_0) + \varepsilon$$

und somit  $-\varepsilon \geq v_t(x_0, t_0)$ . Da die Funktion  $v$  stetig ist, gilt

$$-\frac{\varepsilon}{2} \geq v_t(x, t)$$

in einer Umgebung von  $(x_0, t_0)$ . Insbesondere gilt für  $t < t_0$ , die genügend nahe an  $t_0$  liegen,

$$\max_{x \in [0, L]} v(x, t) \geq v(x_0, t) > v(x_0, t_0) = \max_{x \in [0, L]} v(x, t_0).$$

Da wir ein beliebiges  $t_0$  gewählt haben, folgern wir, dass  $\max_{x \in [0, L]} v(x, t)$  streng monoton fallend in  $t$  ist.

optimal

Im Limes  $\varepsilon \searrow 0$  erhalten wir

$$t_1 \leq t_2: \max_x h(x, t_1) \geq \max_x h(x, t_2)$$

$\max_{x \in [0, L]} u(x, t)$  ist monoton fallend in  $t$ .

Dies ist ein Spezialfall des *Maximumprinzips* der Wärmeleitungsgleichung.

Verwenden wir  $-u$ , so erhalten wir das entsprechende *Minimumprinzip*,

$\min_{x \in [0, L]} u(x, t)$  ist monoton steigend in  $t$ .

Das Maximumprinzip besagt, dass sich die Wärme in diesem Beispiel nicht lokal ansammeln kann (ohne Wärmezufuhr). Ebenso ist nach dem Minimumprinzip eine lokale Abkühlung nicht möglich.

Dies steht im Gegensatz zu Wellenphänomenen, bei denen lokale Extrema aufgrund von Interferenzen möglich sind. Dieser Effekt wird zum Beispiel bei der Stosswellenlithotripsie (Zertrümmerung von Nierensteinen) ausgenutzt.

# Laplace-Gleichung

---

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto u(x_1, \dots, x_n)$$

Eine stationäre Lösung der Wärmeleitgleichung erfüllt die Laplace-Gleichung,

$$\Delta u = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

- ▷ Da  $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$  gilt, ist eine Lösung  $u$  das Potential des divergenzfreien Vektorfeldes  $\nabla u$ .
- ▷ Elektrostatische Felder und Gravitationsfelder sind von diesem Typ.
- ▷ Lösungen der Laplace-Gleichung werden harmonische Funktionen genannt.

$$n=3$$

$$u: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow u(x_1, x_2, x_3)$$

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$
$$\Delta = \operatorname{div}(\nabla)$$

$$\operatorname{div} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}$$

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) = \Delta u$$

Wannicht  $(z_1, \dots, z_n) \rightarrow u(z_1, \dots, z_n)$

So Access

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

$n=1$

$x \mapsto u(x)$

$$\Delta u = u''(x) = 0$$

$$u'(x) = c_1$$

$$u(x) = c_1 x + c_2$$



$$n=2$$

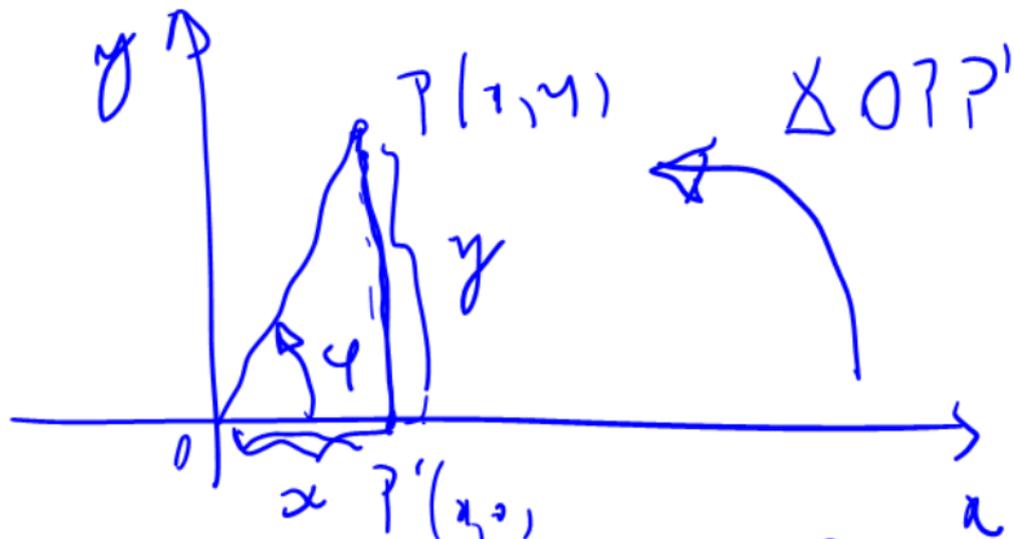
$$(x_1, x_2) \mapsto u(x_1, x_2)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$n=3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto u(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \stackrel{!}{=} 0$$



$$OP^2 = OP'^2 + PP'^2 \quad (\Rightarrow \quad OP^2 = x^2 + y^2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cdot \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \varphi \end{array} \right\} \begin{array}{l} r \geq 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{x}{r} \\ \sin \varphi = \frac{y}{r} \end{array} \right\}$$

Als Beispiel soll die stationäre Lösung der ~~Wärmeleitgleichung~~ <sup>Laplace</sup> auf einer offenen Kreisscheibe  $B_{r_0}(0) \subset \mathbb{R}^2$  mit Radius  $r_0 > 0$  und Mittelpunkt im Ursprung hergeleitet werden.

Zu diesem Zweck verwenden wir Polarkoordinaten. Man kann zeigen, dass die Laplace Gleichung in Polarkoordinaten folgende Form annimmt

(Übung):

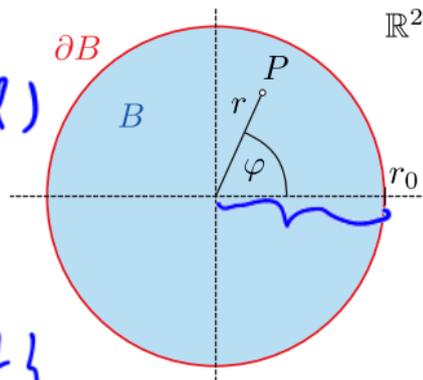
$$\Delta u = 0$$

$$v(x, y) = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ u(r_0, \varphi) = \xi(\varphi) \end{array} \right.$$

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{in } B_{r_0}(0)$$

$$u(r_0, \varphi) = \xi(\varphi) \quad \text{auf } \partial B_{r_0}(0)$$



$$B_{r_0}(0) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r_0^2\}$$

Bem.  $u$  :  $\Delta u = 0$  (in  $(a, b)$ )

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$(r, \varphi) \xrightarrow{\quad} (x, y) \xrightarrow{\quad u \quad} \mathbb{R}$$

$$\Delta u = 0$$

$$\text{Di, 7.12}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$h(r, \varphi) = f(r) \cdot g(\varphi)$$

$$\frac{\partial h}{\partial r} = f'(r) \cdot g(\varphi) \quad \Bigg| \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} = f(r) \cdot g'(\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = f''(r) \cdot g(\varphi) \quad \Bigg| \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} = f(r) \cdot g''(\varphi)$$

$$f''(r) \cdot g(\varphi) + \frac{1}{r} \cdot f'(r) \cdot g(\varphi) + \frac{1}{r^2} f(r) \cdot g''(\varphi) = 0$$

$$\left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{f''(r)}{f} + \frac{1}{r} \cdot \frac{f'(r)}{f} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)} = 0 \quad \therefore \frac{1}{r^2}$$

$$w(x, y)$$

$$\Delta h = 0$$

## The Laplacian in polar coordinates

There are many ways to derive the proper formula for the Laplacian in polar coordinates, but here's one. You might try this yourself and only refer to this computation if you get lost. Anyhow, it's good to sit down and compute this at least once in your life.

We will start with

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Below we will let  $u$  be any function of two variables, with at least two derivatives. Then

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}.$$



Taking one more derivative, we have

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ &= \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right] + \sin \theta \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} \right] \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$



Similarly,

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \dots$$

Taking one more derivative, we see

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= r \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -\sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} + r \left[ -\sin \theta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) + \cos \theta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} + r \left[ -\sin \theta \left( -r \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \cos \theta \left( -r \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + r \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \\ &= -r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} + r^2 \left[ \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \\ &= -r \frac{\partial u}{\partial r} + r^2 \left[ \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \end{aligned}$$

Now we're ready to put everything together:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \end{aligned}$$

which we can rearrange to read

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u.$$

# 1. Schritt: Separation der Variablen

**Ansatz:** Wir wählen  $u(r, \varphi) = f(r)g(\varphi)$ .

▷ Setzt man dies in die PDE ein, erhält man

$$f''g + \frac{1}{r}f'g + \frac{1}{r^2}f\ddot{g} = 0,$$

wobei ' die Ableitung nach  $r$  und  $\ddot{\phantom{x}}$  die Ableitung nach  $\varphi$  bezeichnet

▷ Multipliziert man beide Seiten mit  $\frac{r^2}{fg}$ , erhält man

$$\frac{1}{f}(r^2f'' + rf') = -\frac{\ddot{g}}{g} = \omega^2.$$

▷ Da die linke Seite eine Funktion von  $r$  und die rechte Seite eine Funktion von  $\varphi$  ist, müssen beide gleich einer Konstante  $\omega^2$  sein. Das Vorzeichen dieser Konstante haben wir bereits festgelegt.

▷ Wir müssen also zwei ODEs lösen,

$$\ddot{g} = -\omega^2 g \quad \text{und} \quad r^2f'' + rf' - \omega^2f = 0.$$

Not:  $g''(\varphi)$   
 $\parallel$   
 $\ddot{g}(\varphi)$

Fkt in  $\varphi$   
 $f\ddot{g} = g \cdot K$

Fkt in  $r$

# 1. Schritt: Separation der Variablen

$$g'' + \omega^2 g = 0$$
$$g^2 + \omega^2 = 0$$

- ▷ Die Lösungen der ersten ODE sind

$$g(\varphi) = A \cos(\omega\varphi) + B \sin(\omega\varphi).$$

Da wir nach  $2\pi$ -periodischen Lösungen suchen, benötigen wir  $\omega = \omega_n := n \in \mathbb{N}_0$ , also

$$g_n(\varphi) = A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi).$$

- ▷ Die zweite ODE  $r^2 f_n'' + r f_n' - n^2 f_n = 0$  ist eine *Euler'sche Gleichung*.

Wir können sie mit dem Ansatz  $f_n(r) = r^\alpha$  lösen.

Setzt man dies in die ODE ein, erhält man  $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0$ , also  $\alpha = \pm n$ . Da wir keine Singularitäten (bei  $r = 0$ ) haben wollen, können wir nur  $\alpha = n$  wählen. Daher ist  $f_n(r) = r^n$ .

- ▷ Schliesslich kommen wir zu den Lösungen,

$$u_n(r, \varphi) = f_n(r) g_n(\varphi) = r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

$$r^2 f'' + r f' - n^2 f = 0$$

$$f(r) = r^\alpha$$

$\leftrightarrow$

$$f'(r) = \alpha r^{\alpha-1}$$

$\alpha-1$

$$f''(r) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot r^{\alpha-2}$$

$\alpha-2$

$$r^2 \cdot \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot r^{\alpha-2} + r \cdot (\alpha r^{\alpha-1})$$

$$- n^2 \cdot r^\alpha = 0$$

$$(\alpha \cdot (\alpha-1) + \alpha - n^2) r^\alpha = 0$$

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \quad | \quad \alpha^2 - \alpha + \alpha - n^2 = 0$$

$= 0$

Da die PDE linear und homogen ist, ist die folgende Reihe ebenfalls eine Lösung (falls konvergent),

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)).$$

Wie zuvor wollen wir die Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  so wählen, dass die Randbedingungen erfüllt sind, d.h.,

$$\begin{aligned} u(r_0, \varphi) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)) \stackrel{!}{=} \xi(\varphi) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \end{aligned}$$

*Handwritten notes:* Blue circles around  $A_0$ ,  $B_n$ ,  $a_0/2$ ,  $a_n$ , and  $b_n$ . A blue arrow points from the  $\xi(\varphi)$  term to the  $\sum_{n=1}^{\infty}$  term in the second line. A blue circle around  $\xi(\varphi)$  is labeled "vorgabe" (specification) in blue handwriting. A blue arrow points from the  $\varphi$  in  $u(r_0, \varphi)$  to the  $\varphi$  in the trigonometric functions.

wobei in der zweiten Zeile die Fourierreihe von  $\xi$  steht (angenommen sie konvergiert). Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_n = \frac{a_n}{r_0^n}, \quad B_n = \frac{b_n}{r_0^n}.$$

Die Lösung ist also gegeben durch

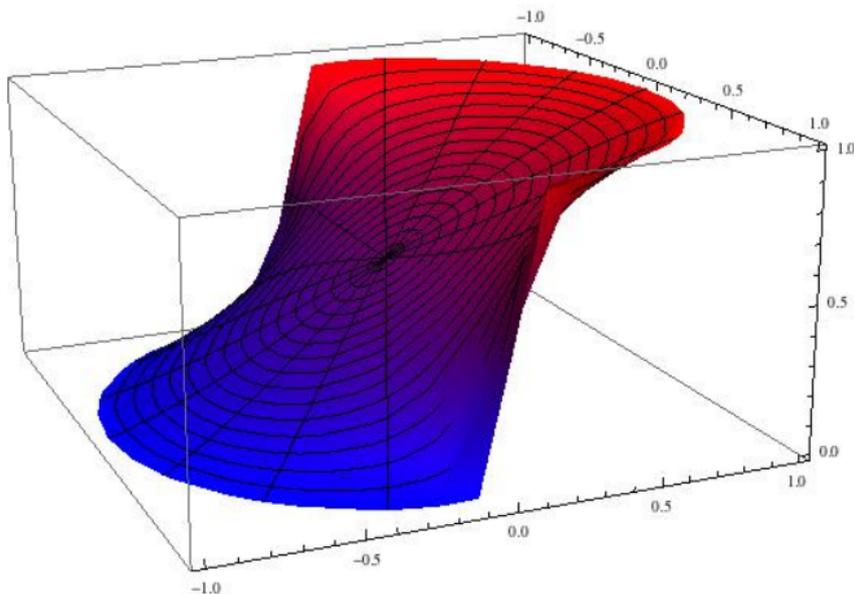
$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^n} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)). \quad (5.4)$$

**Beispiel 5.9.** Wenn wir die Temperatur an der Grenzfläche wie folgt wählen

$$\xi(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } 0 \leq \varphi < \pi \\ 0 & \text{wenn } \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

erhalten wir

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{r^n}{n} \sin(n\varphi).$$



**Abbildung 5.1:** Die Temperatur der Scheibe wird durch dieses Diagramm veranschaulicht. Rot steht für warme, blau für kalte Bereiche.

## 2. Schritt: Superposition

Wenn wir mit Gleichung (5.4) fortfahren, setzen wir die expliziten Fourier-Koeffizienten von  $\xi$  ein und erhalten

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^n} (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \xi(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \left[ \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \xi(t) \cos(nt) dt \right) \cos(n\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \xi(t) \sin(nt) dt \cdot \sin(n\varphi) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(nt) \cos(n\varphi) + \sin(nt) \sin(n\varphi)) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \right] dt. \end{aligned}$$

Nach dem Additionstheorem für den Kosinus können wir die Terme in blau vereinfachen zu

$$\cos(nt) \cos(n\varphi) + \sin(nt) \sin(n\varphi) = \cos(n(t - \varphi)) = \operatorname{Re} \left( e^{i(t-\varphi)} \right)^n.$$

$\hookrightarrow \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$e^{i(t-\varphi)} = \cos(t-\varphi) + i \sin(t-\varphi) \quad \uparrow \quad \Delta$$

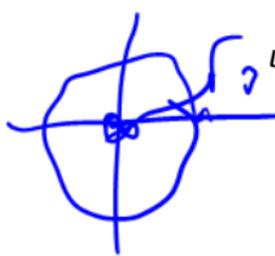
$$e^{in(t-\varphi)} = \frac{\cos(n(t-\varphi)) + i \sin(n(t-\varphi))}{\cos(n(t-\varphi)) + i \sin(n(t-\varphi))}$$

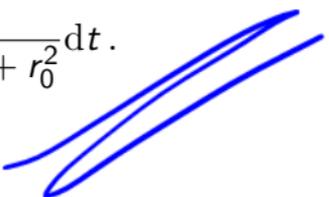
$$\cos n(t-\varphi) = \operatorname{Re} \left( e^{in(t-\varphi)} \right)$$

Die Terme in den eckigen Klammern definieren eine geometrische Reihe und können vereinfacht werden als

$$\begin{aligned}
 [\dots] &= \operatorname{Re} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} e^{i(t-\varphi)} \right)^n \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left( 1 + 2 \frac{\frac{r}{r_0} e^{i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{r_0} e^{i(t-\varphi)}} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \frac{r_0 + r e^{i(t-\varphi)}}{r_0 - r e^{i(t-\varphi)}} = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2rr_0 \cos(t - \varphi) + r_0^2}.
 \end{aligned}$$

Setzt man dies wieder in die eckigen Klammern ein, erhält man



$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2rr_0 \cos(t - \varphi) + r_0^2} dt.$$


$a$  klein  $|a| < 1$

$$1 + \underbrace{a + a^2 + \dots + a^{n-1}} = \frac{1}{1-a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{1-1+a}{1-a}$$

$$= \frac{a}{1-a}$$

Für  $r = 0$  erhalten wir die Spezialform

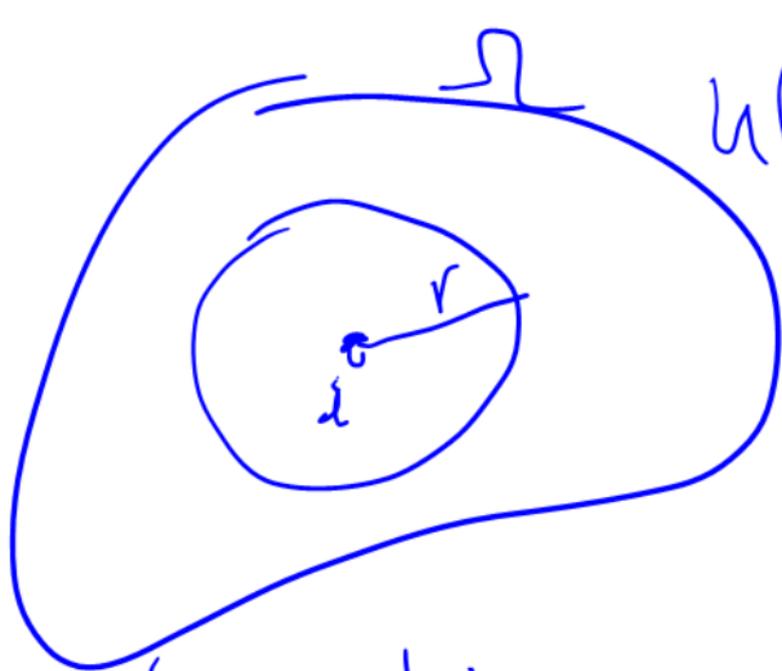
$$u(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(t) dt.$$



Wir formulieren dieses Ergebnis als Satz:

**Satz 5.10.** (*Mittelwerteigenschaft*) Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  und sei  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine harmonische Funktion, d.h.  $u$  erfülle die Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$ . Sei  $B_r(x)$  eine offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $r$ , sodass ihr Abschluss vollständig in  $\Omega$  enthalten ist. Der Wert  $u(x)$  von  $u$  im Zentrum der Kreisscheibe ist gleich dem Mittelwert von  $u$  auf dem Rand der Kreisscheibe  $\partial B_r(x)$ .

**Bemerkung:** Die Mittelwerteigenschaft gilt in jeder Dimension.



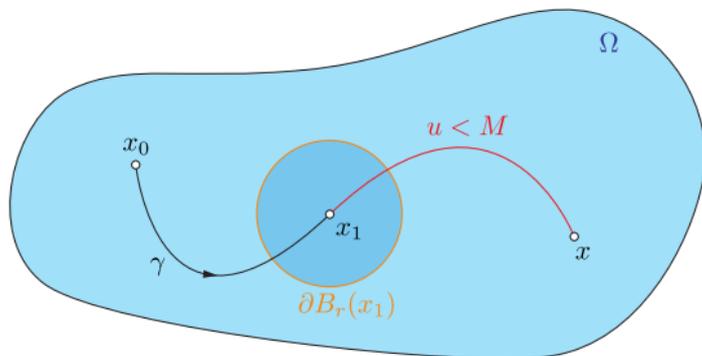
$$u(x) = \int_{\partial B(x)} u(y) dy$$

$B_r(x) =$  Kreis mit Radius  $r$   
und Mittelpt  $x$

Aus der Mittelwerteigenschaft lässt sich Folgendes ableiten:

**Korollar 5.11.** (*Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen*) Nimmt eine harmonische Funktion  $u$  ein Maximum in einem inneren Punkt  $x_0$  ihres zusammenhängenden Definitionsbereichs  $\Omega$  an, dann ist  $u$  konstant.

*Beweis (indirekt).* Nehmen Sie an  $M := u(x_0) > u(x)$  für  $x \in \Omega$ . Wir verbinden  $x_0$  und  $x$  durch einen Pfad  $\gamma$ . Sei  $x_1$  der letzte Punkt auf  $\gamma$ , an dem  $u$  den Wert  $M$  annimmt. Wir wählen  $r > 0$  so, dass  $B_r(x_1) \subseteq \Omega$ .



Also ist  $u \leq M$  auf  $\partial B_r(x_1)$  und insbesondere ist  $u < M$  in einer Umgebung des Punktes, an dem  $\gamma$  den Kreis  $\partial B_r(x_1)$  schneidet. Nach unserer Annahme gilt  $M = u(x_1)$ , aber die Mittelwerteigenschaft besagt nun, dass  $u(x_1) < M$  gelten muss. Widerspruch. Also  $u(x_0) \not\approx u(x)$ . Da  $x_0$  ein beliebiger innerer Punkt war, muss  $u$  auf  $\Omega$  konstant sein.  $\square$

**Bemerkung.** Das Maximumprinzip gilt auch in jeder Dimension. Wir erhalten das entsprechende Minimumprinzip, indem wir die Funktion  $-u$  betrachten.

**Interpretation:** Eine stationäre Temperaturverteilung erreicht ihr Maximum immer auf dem Rand.

# Take aways Kap 5:

0. Wiederholung partielle Ableitungen und Kettenregel

---

0  $\leftarrow$  Kap 1 (Formel Rechen)

$\uparrow$  Berechnung der F-Koeff.

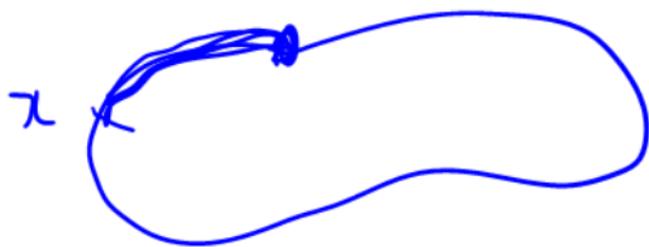
---

① Allg Klassifizierung

Not:  $\nabla_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \vdots \end{pmatrix}$ ; dir.

$$\textcircled{2} \text{ Die } \frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \textcircled{\text{PDE}}$$

Nur die Lösungsmethode Ansatz



$$\left. \begin{array}{l} \text{AB:} \\ u(x, 0) = \\ \underline{u(x+L, t) = u(x, t)} \end{array} \right\} \text{Diagram of a rod with a yellow section and an arrow pointing to it.}$$

Methode: Suche  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Gel. für } X \\ \text{Gel. für } T \end{array} \right.$

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$u(x, 0) \stackrel{f(x)}{\stackrel{!}{=}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega x) + b_n \sin(n \omega x)$$

↳  $a_n, b_n$  to bestimmen

$$u(x, t)$$

③

 $u(x, y)$  $\Delta u = 0$ Näherung in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \dots = 0$$

Suche  $u(r, \varphi) = f(r) \cdot g(\varphi)$  $g(\varphi)$  bekannt

$$\hookrightarrow f, g \longrightarrow u = \sum f(r) \cdot g(\varphi)$$

Magnitud:

$$\Delta u = 0$$

→ max auf Oberfl.  
→ in Innern ⇒ Wert

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} h(y) dy$$

Also ist  $u \leq M$  auf  $\partial B_r(x_1)$  und insbesondere ist  $u < M$  in einer Umgebung des Punktes, an dem  $\gamma$  den Kreis  $\partial B_r(x_1)$  schneidet. Nach unserer Annahme gilt  $M = u(x_1)$ , aber die Mittelwerteigenschaft besagt nun, dass  $u(x_1) < M$  gelten muss. Widerspruch. Also  $u(x_0) \not\approx u(x)$ . Da  $x_0$  ein beliebiger innerer Punkt war, muss  $u$  auf  $\Omega$  konstant sein.  $\square$

**Bemerkung.** Das Maximumprinzip gilt auch in jeder Dimension. Wir erhalten das entsprechende Minimumprinzip, indem wir die Funktion  $-u$  betrachten.

**Interpretation:** Eine stationäre Temperaturverteilung erreicht ihr Maximum immer auf dem Rand.