Prüfung Mathematik III, Winter 2016

Prof. Dr. E. W. Farkas

Viel Erfolg!

1. Laplace-Transformation

Im Folgenden bezeichne:

$$\mathcal{L}{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

die Laplace-Transformierte einer gegebenen Funktion f, sofern das Integral existiert und endlich ist.

a) Wie lautet die Laplace-Transformation von:

wobei $\sigma(u) = 1$ für $u \ge 0$ und $\sigma(u) = 0$ für u < 0.

b) Bestimmen Sie unter Verwendung des Faltungssatzes die Originalfunktion h(t)

zu: $\frac{1}{s(s-a)^2}, \text{ mit } a \in \mathbb{R},$ das heisst, bestimmen Sie die Funktion h(t) mit $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{1}{s(s-a)^2}$

c) Für gegebene $A, B \in \mathbb{R}$ seien die Funktionen $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems:

 $x_1' = -x_2(t)$

zu den Anfangsbedingungen $x_1(0) = A, x_2(0) = B,$ wobei $x_i'(t) = dx_i(t)/dt$ für i = 1, 2 die Ableitung nach t bezeichnet.

- Seien $F_i = \mathcal{L}\{x_i\}$ für i = 1, 2. Bestimmen Sie F_1 in Abhängigkeit von s, A und B.
- Bestimmen Sie durch Rücktransformation die Funktion $x_1(t)$.

 Hinweis: Machen Sie eine Partialbruchzerlegung.

2. Fourier Reihen

Die Funktion g(x) auf dem Intervall $x \in [-1, 1[$ sei gegeben als:

$$g(x) := \begin{cases} 2x + x^2 & -1 \le x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

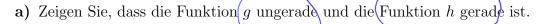
und die Funktion h(x) auf dem selben Intervall als:

$$h(x) := \begin{cases} -2x - x^2 & -1 \le x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

Weiter ist die reelle Fourier-Reihe einer Funktion f(x):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

mit $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.



- b) Was können Sie jeweils über die Koeffizienten a_n , b_n der reellen Fourier-Reihen einer geraden beziehungsweise ungeraden Funktion aussagen?
- c) Berechnen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihen beider Funktionen.

Die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe einer Funktion f(x) schreibt sich:

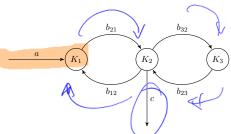
$$f(x) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$$

 $mit c_n \in \mathbb{C}.$

d) Bestimmen Sie im Folgenden die Koeffizienten c_n der komplexen Fourier Reihen von g und h.

3. Kompartiment-Modell

Gegeben seien die drei Teile K_1 , K_2 und K_3 , welche zu einem Kompartiment-Modell gehören:



y= (y y y y)

Die Substanz in den einzelnen Teilen wird über die Zeit durch die Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ beschrieben.

- a) Stellen Sie die Differentialgleichungen für die drei Funktionen y_1 , y_2 und y_3 auf.
- b) Das System lässt sich in Matrixform $\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y} + \underline{g}$ schreiben. Finden Sie die 3×3 Matrix \mathbf{A} sowie den Vektor \underline{g} . Es sei $\underline{y} := [y_1, y_2, y_3]^T$.

Die Parameter haben folgende Werte: $b_{21}=2$, $b_{12}=2$, mit Zufluss a=3 und Abfluss c=3. Wir betrachten nun den Fall $b_{32}=0$ und $b_{23}=0$ wobei sich das Modell vereinfachen lässt.

- c) Zeichnen Sie das simplere Kompartiment-Modell und beschriften Sie die Pfeile. Achten Sie auch auf die korrekte Pfeilrichtung. Formulieren Sie anschliessend das System von zwei Differentialgleichungen $\underline{z}' = \mathbf{C}\underline{z} + \underline{h}$, welches dieses Modell beschreibt. C ist eine 2×2 Matrix und $\underline{z} := [z_1, z_2]^T$.
- d) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 , λ_2 und Eigenvektoren $\underline{\nu_1}$ und $\underline{\nu_2}$ der Matrix C.
- e) Berechnen Sie die Lösung $\underline{z}(t)$ des Differentialgleichungssystems für $t \geq 0$ zum Anfangswert $\underline{z}(0) = [0,0]^T$. Nutzen Sie die Diagonalisierung der Matrix \mathbf{C} um das System in zwei skalare Differentialgleichungen zu entkoppeln.

4. Partielle Differentialgleichung

Wir betrachten einen offenen Draht mit Temperaturleitungsfähigkeit D > 0 und Länge 1 und suchen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:

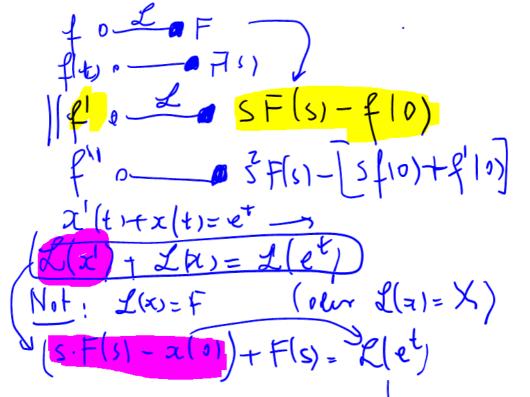
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{für alle } 0 < x < 1, \ t > 0 \tag{1}$$

zu den Randbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \quad \text{für alle } t > 0.$$
 (2)

- a) Bestimmen Sie alle Lösungen von der Form u(x,t) = X(x)T(t) der Wärmeleitungsgleichung (1) mit den Randbedingungen (2).
- b) Die Temperatur zum Zeitpunkt t=0 sei gegeben durch u(x,0)=x für alle $0 \le x \le 1$. Bestimmen Sie für diese Anfangswerte durch Superposition der gefundenen Lösungen aus a) die Lösung zur Wärmeleitungsgleichung (1) mit den Randbedingungen (2).
- c) Zeigen Sie: $\int_0^1 u(x,t)dx$ ist konstant für alle $t\geq 0$, das heisst, die Wärme im Draht bleibt zeitlich konstant.

Mathewalk II Aufgate 1 I Prifung 2016



$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = \frac{1}{s-1} \qquad \mathcal{L}(e^{t}) = \frac{1}{s-1}$$

$$S \cdot F(s) + F(s) = \mathcal{L}(e^{t}) + \chi(n)$$

$$F(s) \cdot (s+1) = \frac{1}{s-1} + e$$

$$(s+1) = \frac{1}{s+1}$$

$$Met 1. Partially depending$$

$$(S+1)(S-1) = S+1$$

$$1 = A(S-1) + B(S+1)$$

$$1 = (A+B)S - A+B$$

$$-A+B \neq D$$

$$-A+B \neq 1$$

$$2B=1$$

$$(S+1)(S-1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{S+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-1)}$$

$$F(S) = -\frac{1}{2} \frac{1}{S+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{S-1} + \frac{e}{S+1}$$
 $1 \cdot E \cdot e^{2t} \circ e^{2t} \circ \frac{1}{S-2}$
 $e^{t} \circ \frac{1}{S+1} = \frac{1}{S+1}$
 $e^{t} \circ \frac{1}{S-1} = \frac{1}{S+1} = \frac{1}{2} =$

1 . 1 St. J-1 ė (+xt)a (5+1) (5-1)

= et. 1 28/14 set ez de

$$\lim_{x \to \infty} x'(t) + |x|(t)) = 0$$
, $x(x') + |x|(x) = 212$
 $x'(t) = -x^2(t)$

$$\frac{dx}{dt} = -x^{2}(x) (-x) dx = -x^{2} dt$$

$$\frac{dx}{dt} = -dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x^{2}} = -\int dt$$

Sum:
$$x(0) = 1$$

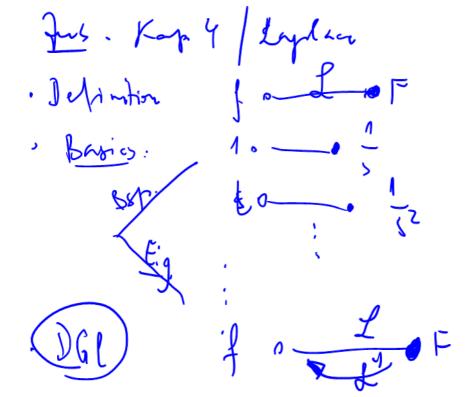
$$-\frac{1}{x} = -t + 1$$

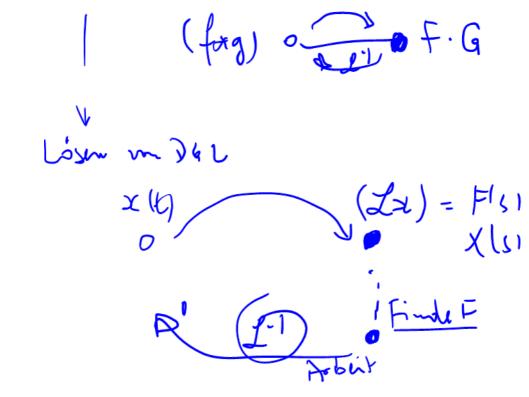
$$-\frac{1}{x} = -t - 1$$

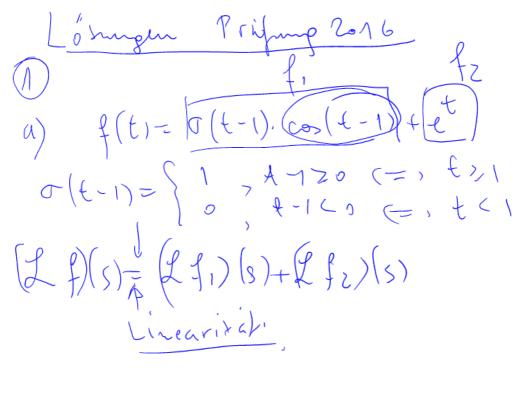
$$\frac{1}{x} = t + 1 = 1$$

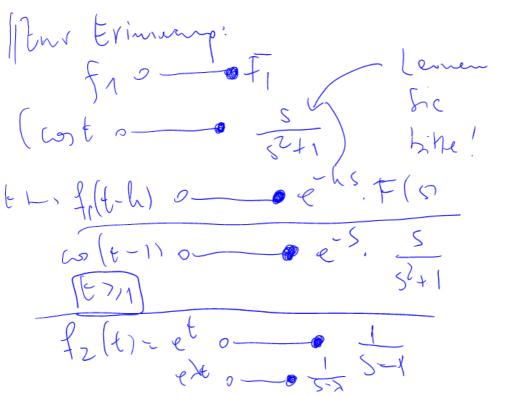
$$\frac{1}{x} = t + 1 = 1$$

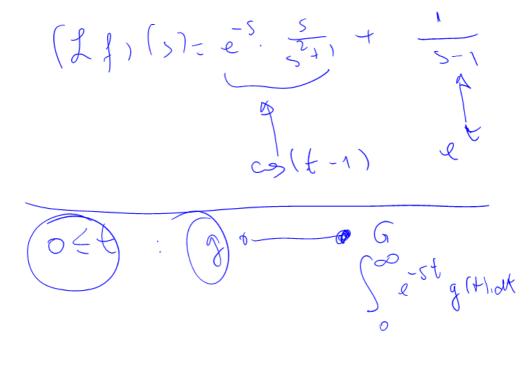
$$\frac{1}{x} = t + 1 = 1$$

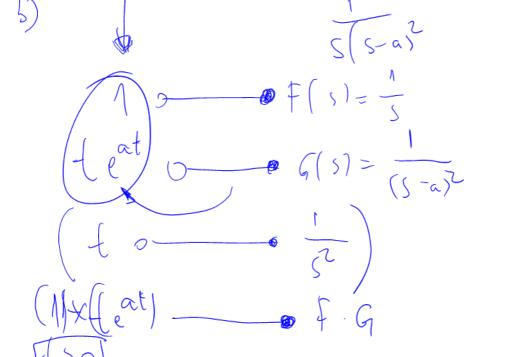




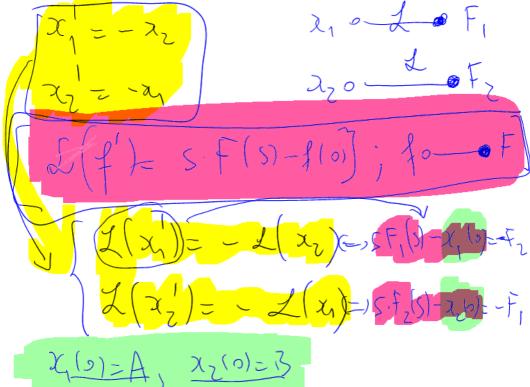


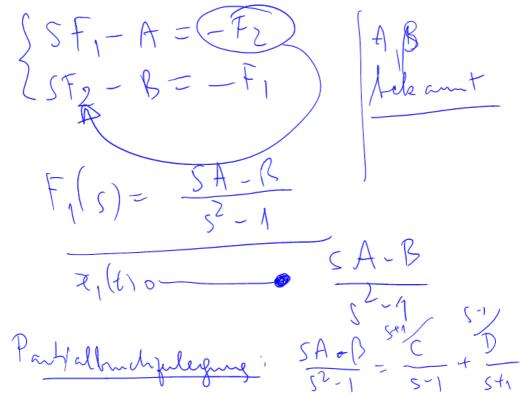






$$= \frac{e^{-\frac{q}{4}} - \frac{1}{4}}{a}$$





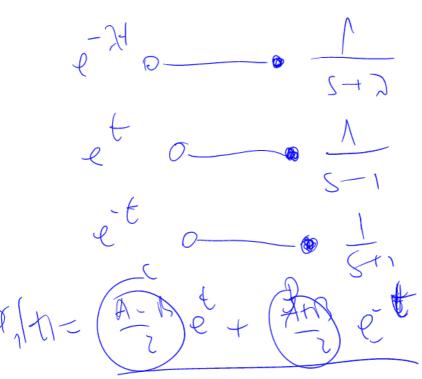
$$\frac{SA - R}{S^{2} - 1} = \frac{C(S + 1) + D(S - 1)}{S^{2} - 1}$$

$$(SA) - R = C + DS + C - D$$

$$R = C + D = A - R = C + D = C$$

$$R = C - D = C$$

$$\frac{1 - B = (-D) \cup (-D$$



Lösungen zur Prüfung Mathematik III, Winter 2016

Prof. Dr. E. W. Farkas

1. Laplace-Transformation

Im Folgenden bezeichne:

$$\mathcal{L}{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

die Laplace-Transformierte einer gegebenen Funktion f, sofern das Integral existiert und endlich ist.

a) Wie lautet die Laplace-Transformation von:

$$f(t) = \sigma(t-1)\cos(t-1) + e^t$$

wobei $\sigma(u) = 1$ für $u \ge 0$ und $\sigma(u) = 0$ für u < 0.

Lösung:

Die Laplace-Transformation von $\cos(t)$ lautet $\frac{s}{s^2+1}$. Da die Funktion um 1 nach rechts verschoben wird, kommt ein Faktor e^{-s} hinzu. Die Laplace-Transformation von e^t lautet $\frac{1}{s-1}$. Wegen der Linearität der Laplace-Transformation erhalten wir also:

$$\mathcal{L}{f} = \mathcal{L}{\sigma(t-1)\cos(t-1)} + \mathcal{L}{e^t} = \frac{e^{-s}s}{s^2+1} + \frac{1}{s-1}.$$

b) Bestimmen Sie unter Verwendung des Faltungssatzes die Originalfunktion h(t) zu:

$$\frac{1}{s(s-a)^2}$$
, mit $a \in \mathbb{R}$,

das heisst, bestimmen Sie die Funktion h(t) mit $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{1}{s(s-a)^2}$

Lösung:

Die Originalfunktionen zu $\frac{1}{s}$ und $\frac{1}{(s-a)^2}$ lauten 1 und te^{at} . Es gilt also:

$$h(t) = 1 * te^{at} = \int_0^t ue^{au} du = u \frac{1}{a} e^{au} |_0^t - \int_0^t \frac{1}{a} e^{au} = \frac{te^{at}}{a} - \frac{1}{a^2} e^{au} |_0^t = \frac{te^{at}}{a} - \frac{e^{at} - 1}{a^2}.$$

c) Für gegebene $A, B \in \mathbb{R}$ seien die Funktionen $x_1(t), x_2(t)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems:

$$x'_1 = -x_2(t)$$

 $x'_2 = -x_1(t)$

zu den Anfangsbedingungen $x_1(0) = A$, $x_2(0) = B$, wobei $x_i'(t) = dx_i(t)/dt$ für i = 1, 2 die Ableitung nach t bezeichnet.

- Seien $F_i = \mathcal{L}\{x_i\}$ für i = 1, 2. Bestimmen Sie F_1 in Abhängigkeit von s, A und B.
- Bestimmen Sie durch Rücktransformation die Funktion $x_1(t)$. Hinweis: Machen Sie eine Partialbruchzerlegung.

Lösung:

Durch Laplace-Transformation und benützen des Ableitungssatzes erhalten wir:

$$sF_1 - A = -F_2$$

$$sF_2 - B = -F_1.$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach F_2 und einsetzen in die erste Gleichung ergibt:

$$sF_1 - A = \frac{F_1 - B}{s}.$$

Auflösen nach F_1 ergibt:

$$F_1 = \frac{sA - B}{s^2 - 1}.$$

Die Nullstellen des Nenners sind 1 und -1. Wir machen daher den Ansatz:

$$F_1 = \frac{sA - B}{s^2 - 1} = \frac{C}{s - 1} + \frac{D}{s + 1}$$

für die Partialbruchzerlegung. Durch Multiplikation mit s^2-1 erhalten wir:

$$sA - B = C(s+1) + D(s-1).$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$A = C + D$$
$$-B = C - D.$$

Es folgt:

$$C = \frac{A-B}{2}$$
 und $D = \frac{A+B}{2}$.

Die Rücktransformationen von $\frac{1}{s-1}$ und $\frac{1}{s+1}$ sind e^t und e^{-t} . Die Lösung lautet also:

$$x_1(t) = \frac{A-B}{2}e^t + \frac{A+B}{2}e^{-t}.$$

2. Fourier Reihen

Die Funktion g(x) auf dem Intervall $x \in [-1, 1]$ sei gegeben als:

$$g(x) := \begin{cases} 2x + x^2 & -1 \le x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

und die Funktion h(x) auf dem selben Intervall als:

$$h(x) := \begin{cases} -2x - x^2 & -1 \le x < 0 \\ 2x - x^2 & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

Weiter ist die reelle Fourier-Reihe einer Funktion f(x):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

 $mit \ a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}.$



a) Zeigen Sie, dass die Funktion q ungerade und die Funktion h gerade ist.

Lösung:

(4 Punkte: 2 pro Funktion)

Damit die Funktion g ungerade ist, muss g(-x) = -g(x) gelten Sei 0 < adann ist:



$$g(-a) = -2a + a^2$$

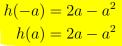
$$-g(a) = -2a + a^2$$

und für
$$-1 \le a < 0$$
 ist ebenso:

$$g(-a) = -2a + a^2$$
$$-g(a) = -2a + a^2.$$

Die Funktion h sei gerade, es muss also h(-x) = h(x) gelten. Sei 0 < qdann ist:

$$h(-a) = 2a - a^2$$
$$h(a) = 2a - a^2$$





und für $-1 \le a < 0$ ist:

$$h(-a) = -2a - a^{2}$$
$$h(a) = -2a - a^{2}.$$



b) Was können Sie jeweils über die Koeffizienten a_n , b_n der reellen Fourier-Reihen einer geraden beziehungsweise ungeraden Funktion aussagen?

Lösung:

(2 Punkte: 1 pro Funktion)

Die Funktion g ist ungerade die Reihe enthält nur ungerade Reihenglieder, also gilt $a_0 = 0$, $a_n = 0$ und $b_n \neq 0$. Die Funktion h ist gerade, die Reihe enthält nur gerade Reihenglieder, also gilt genau umgekehrt $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ und $b_n = 0$.

c) Berechnen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihen beider Funktionen.

Lösung:

(6 Punkte: 2 pro b_n^g , a_0^h , a_n^h)

Die Periode beider Funktionen ist gleich der Intervalllänge, also T=2 und somit $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

Für g berechnen wir nur:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^{1} g(x) \sin(n\omega x) dx$$

$$= \frac{4}{T} \int_{0}^{1} g(x) \sin(n\omega x) dx$$

$$= 2 \int_{0}^{1} (2x - x^2) \sin(n\omega x) dx$$

$$= 4 \int_{0}^{1} x \sin(n\omega x) dx - 2 \int_{0}^{1} x^2 \sin(n\omega x) dx$$

$$= \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{2(-1)^n (\pi^2 n^2 - 2) + 4}{\pi^3 n^3}$$

$$= \frac{4 - 2(-1)^n (\pi^2 n^2 + 2)}{\pi^3 n^3}.$$

Für h berechnen wir a_0 :

$$a_{0} = \frac{2}{T} \int_{-1}^{1} h(x) dx$$

$$= \frac{4}{T} \int_{0}^{1} h(x) dx$$

$$= 2 \int_{0}^{1} x^{2} - 2x dx$$

$$= 4 \int_{0}^{1} x dx - 2 \int_{0}^{1} x^{2} dx$$

$$= 2 - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

und a_n :

$$a_{n} = \frac{2}{T} \int_{-1}^{1} h(x) \cos(n\omega x) dx$$

$$= \frac{4}{T} \int_{0}^{1} h(x) \cos(n\omega x) dx$$

$$= 2 \int_{0}^{1} (2x - x^{2}) \cos(n\omega x) dx$$

$$= 4 \int_{0}^{1} x \cos(n\omega x) dx - 2 \int_{0}^{1} x^{2} \cos(n\omega x) dx$$

$$= \frac{4((-1)^{n} - 1)}{\pi^{2}n^{2}} - \frac{4(-1)^{n}}{\pi^{2}n^{2}}$$

$$= -\frac{4}{\pi^{2}n^{2}}.$$

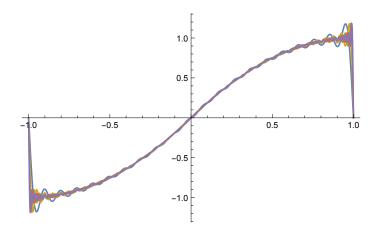


Abbildung 1: Näherungen mit n=20,40,60,80,100 Reihengliedern.

Die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe einer Funktion f(x) schreibt sich:

$$f(x) = \sum_{n = -\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$$

$$\omega > \frac{7}{100}$$

 $mit c_n \in \mathbb{C}.$

d) Bestimmen Sie im Folgenden die Koeffizienten c_n der komplexen Fourier Reihen von g und h.

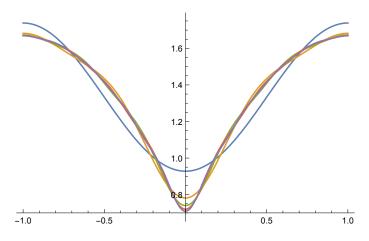


Abbildung 2: Näherungen mit n = 2, 4, 6, 8, 10 Reihengliedern.

Lösung:

(3 Punkte: 1/2 pro c_{-n} , c_0 , c_n je Funktion)

Die Umrechnungsregeln sind:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$
.

Therungen mit
$$n = 2, 4, 6, 8, 10$$
 Reihengliedern.

$$c_0, c_n \text{ je Funktion})$$

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

Für die Funktion g finden wir:

$$c_0 = 0$$

$$c_n = -\frac{i}{2}b_n = \frac{i(-1)^n (\pi^2 n^2 + 2) - 2i}{\pi^3 n^3}$$

$$c_{-n} = \frac{i}{2}b_n = \frac{-i(-1)^n (\pi^2 n^2 + 2) + 2i}{\pi^3 n^3}$$

und für die Funktion h ergibt sich:

$$c_0 = \frac{2}{3}$$

$$c_n = \frac{1}{2}a_n = -\frac{2}{\pi^2 n^2}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}a_n = -\frac{2}{\pi^2 n^2}$$

Die Koeffizienten von g sind rein imaginär und die Koeffizienten von h rein reell.

3. Kompartiment-Modell

Gegeben seien die drei Teile K_1 , K_2 und K_3 , welche zu einem Kompartiment-Modell gehören:

Die Substanz in den einzelnen Teilen wird über die Zeit durch die Funktionen $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ beschrieben.

a) Stellen Sie die Differentialgleichungen für die drei Funktionen y_1, y_2 und y_3 auf.

Lösung:

(2 Punkte)

Die drei gekoppelten Differentialgleichungen lauten:

$$y'_{1}(t) = -b_{21}y_{1}(t) + b_{12}y_{2}(t) + a$$

$$y'_{2}(t) = b_{21}y_{1}(t) - (b_{12} + b_{32} + c)y_{2}(t) + b_{23}y_{3}(t)$$

$$y'_{3}(t) = b_{32}y_{2}(t) - b_{23}y_{3}(t)$$

für $t \ge 0$.

b) Das System lässt sich in Matrixform $\underline{y}' = \mathbf{A}\underline{y} + \underline{g}$ schreiben. Finden Sie die 3×3 Matrix **A** sowie den Vektor \underline{g} . Es sei $\underline{y} := [y_1, y_2, y_3]^T$.

Lösung:

(2 Punkte)

Das Differentialgleichungssystem ist:

$$\underline{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{21} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & -(b_{12} + b_{32} + c) & b_{23} \\ 0 & b_{32} & -b_{23} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $t \geq 0$.

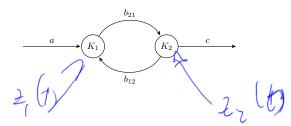
Die Parameter haben folgende Werte: $b_{21} = 2$, $b_{12} = 2$, mit Zufluss a = 3 und Abfluss c = 3. Wir betrachten nun den Fall $b_{32} = 0$ und $b_{23} = 0$ wobei sich das Modell vereinfachen lässt.

c) Zeichnen Sie das simplere Kompartiment-Modell und beschriften Sie die Pfeile. Achten Sie auch auf die korrekte Pfeilrichtung. Formulieren Sie anschliessend das System von zwei Differentialgleichungen $\underline{z}' = \mathbf{C}\underline{z} + \underline{h}$, welches dieses Modell beschreibt. C ist eine 2×2 Matrix und $\underline{z} := [z_1, z_2]^T$.

Lösung:

(3 Punkte: 1 Zeichnung, 2 Gleichungssystem)

Das vereinfachte Modell hat folgende Gestalt und die zugehörigen Differential-



gleichungen lauten:

$$\underline{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{21} & b_{12} \\ b_{21} & -(b_{12} + c) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit den konkreten Werten ergibt sich daraus:

$$\underline{\underline{z'}(t)} = \begin{pmatrix} z'_1(t) \\ z'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

d) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und Eigenvektoren $\underline{\nu_1}$ und $\underline{\nu_2}$ der Matrix C.

Lösung:

(4 Punkte: 2 für Eigenwerte, 2 für Eigenvektoren)

Die Eigenwerte sind:

$$\lambda_1 = -6$$
$$\lambda_2 = -1$$

und die Eigenvektoren sind:

$$\underline{\nu_1} = \begin{pmatrix} -1\\2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\nu_2} = \begin{pmatrix} 2\\1 \end{pmatrix}.$$

e) Berechnen Sie die Lösung $\underline{z}(t)$ des Differentialgleichungssystems für $t \geq 0$ zum Anfangswert $\underline{z}(0) = [0,0]^T$. Nutzen Sie die Diagonalisierung der Matrix **C** um das System in zwei skalare Differentialgleichungen zu entkoppeln.

Lösung:

(4 Punkte)

Es seien:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{\nu_1} & \underline{\nu_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

und:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

und die Diagonalisierung ist dann $\mathbf{C} = \mathbf{P} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{P}^{-1}$. Wir entkoppeln damit das System:

$$\underline{z}' = \mathbf{C}\underline{z} + \underline{h}$$

$$\underline{z}' = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\underline{z} + \underline{h}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\underline{z}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}\underline{z} + \mathbf{P}^{-1}\underline{h}$$

$$\underline{u}' = \mathbf{\Lambda}\underline{u} + \underline{\tilde{h}}$$

wobe
i $\underline{u}=\mathbf{P}^{-1}\underline{z}$ und erhalten zwei skalare Differentialgleichungen:

$$u'_1 = \lambda_1 u_1 + \tilde{h}_1$$

 $u'_2 = \lambda_2 u_2 + \tilde{h}_2$.

Die Lösungen davon sind:

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-6t}}{10} - \frac{1}{10} \\ \frac{6}{5} - \frac{6e^{-t}}{5} \end{pmatrix}$$

und wir bekommen mit $\underline{z}=\mathbf{P}\underline{u}$ die Lösungen:

$$z_1(t) = -\frac{e^{-6t}}{10} - \frac{12e^{-t}}{5} + \frac{5}{2}$$
$$z_2(t) = \frac{e^{-6t}}{5} - \frac{6e^{-t}}{5} + 1.$$

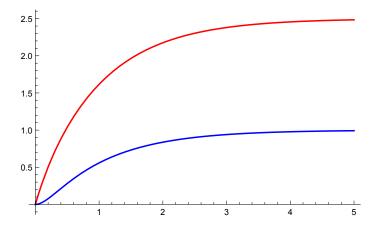


Abbildung 3: Lösungen $z_1(t)$ (rot) und $z_2(t)$ (blau).

4. Partielle Differentialgleichung

Wir betrachten einen offenen Draht mit Temperaturleitungsfähigkeit D>0 und Länge 1 und suchen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{für alle } 0 < x < 1, \ t > 0 \tag{1}$$

zu den Randbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$$
 für alle $t > 0$. (2)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen von der Form u(x,t) = X(x)T(t) der Wärmeleitungsgleichung (1) mit den Randbedingungen (2).

Lösung:

Aus der Vorlesung folgt, dass Basislösungen von der Form:

$$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{-D\omega^2 t}$$

sind. Die Ableitung nach x ist:

$$\omega(-A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x))e^{-D\omega^2t}$$
.

Wegen der Randbedingung (2) gilt B=0 und $\omega=n\pi$ für ein $n\in\{0,1,2,\dots\}$. Die Lösungen lauten also:

$$A\cos(n\pi x)e^{-D(n\pi)^2t}.$$

b) Die Temperatur zum Zeitpunkt t=0 sei gegeben durch u(x,0)=x für alle $0 \le x \le 1$. Bestimmen Sie für diese Anfangswerte durch Superposition der gefundenen Lösungen aus a) die Lösung zur Wärmeleitungsgleichung (1) mit den Randbedingungen (2).

Lösung:

Wir verwenden den Ansatz:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) e^{-D(n\pi)^2 t}.$$
 (3)

Die Koeffizienten A_n bestimmen wir so, dass die Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ erfüllt ist. Für t = 0 ist (3) die Fourierreihe einer geraden Funktion. Wir betrachten daher die gerade 2-periodische Fortsetzung \bar{u}_0 von $u_0(x) = x$ für alle 0 < x < 1. Da \bar{u}_0 und $\cos(n\pi x)$ gerade sind, gilt für die Fourierkoeffizienten:

$$A_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \bar{u}_0(x) \cos(n\pi x) dx = 2 \int_{0}^{1} x \cos(n\pi x) dx.$$

Mittels partieller Integration folgt:

$$A_n = \frac{2}{n\pi} \left(x \sin(n\pi x) |_0^1 - \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \right) = \frac{2}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x) |_0^1 = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{(n\pi)^2} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zudem ist $A_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1$. Die Lösung lautet also:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \sum_{n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^2} \cos(n\pi x) e^{-D(n\pi)^2 t}.$$

c) Zeigen Sie: $\int_0^1 u(x,t)dx$ ist konstant für alle $t \geq 0$, das heisst, die Wärme im Draht bleibt zeitlich konstant.

Lösung:

Es gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u dx = \int_0^1 u_t dx = \int_0^1 Du_{xx} dx = Du_x|_0^1 = 0.$$