ETH Zürich HS 2021
Neur. Syst. Comp., D-MATL, D-MAVT
Patrick Cheridito

Koordinatorin
Hanna Wutte

Stochastik

Serie 10

1. Die Zeitschrift "Gemüsetest" testet den Wahrheitsgehalt der folgenden Werbeaussagen:

1. Gemüsehändler Hase behauptet seine Karotten seien im Durchschnitt mindestens $30cm$ lang.
2. Gleichzeitig preist er seine Kartoffeln der Sorte "Pellworm" als ideale Pellkartoffeln an. Sie seien mit einem durchschnittlichen Gewicht von $50g$ weder zu dick noch zu dünn.
3. Konservenfabrikant Hamster wirbt für seine extra zarten jungen Erbsen mit der Garantie, die durchschnittliche Dicke der jungen Erbsen betrage höchstens $3mm$.
4. Er behauptet auch, dass der Anteil von holzigen Spargeln in seinen Konserven unter $0,3\%$ liege.
5. Ausserdem lobt er die ausgewogene Mischung seiner "Erbsen mit Karotten", die genau 40% zu 60% Gewichtsanteil betrage.

a) Gib jeweils an, ob ein linksseitiger, ein rechtsseitiger oder ein zweiseitiger Test nötig ist um den Wahrheitsgehalt[1] der Aussagen zu testen. Auf welchen Parameter bezüglich welcher Zufallsvariable wird getestet? Stelle jeweils Nullhypothese und Gegenhypothese (Alternativhypothese) auf.

(Der Test selber muss (und kann mangels fehlender Angaben) nicht durchgeführt werden.)

b) Die Karotten von Hase sind tatsächlich durchschnittlich 30 cm lang. In ihrem Test kommt die Zeitschrift jedoch zu dem Ergebnis, dass die Werbeaussage falsch sei. Was ist passiert? (Fehler 1.Art oder 2.Art?)

c) Der tatsächliche Anteil an holzigen Spargeln liegt bei 2%, trotzdem akzeptiert die Zeitschrift nach ihrem Test die Aussage von Fabrikant Hamster. Warum? (Fehler 1.Art oder 2.Art?)

[1] Genauer geht es darum, die Aussagen zu widerlegen. Gelingt dies nicht, bleibt nichts anderes übrig, als die Aussagen zu akzeptieren, womit noch lange nicht belegt ist, dass sie wahr sind.

Bitte wenden!

2. Lisa hat eine Maschine gebaut, die das Abwerfen einer Münze filmt und anhand einer komplizierten Videoanalyse das Ergebnis ("Kopf" oder "Zahl") vorhersagt. Sie glaubt aber, dass dies reiner Zufall ist und die Vorhersagen der Maschine im Schnitt nur in der Hälfte der Fälle zutreffen. Ihre Freundin Laura hält sie für eine Pessimistin und möchte in einem statistischen Test nachweisen, dass die Maschine nicht einfach nur zufällige Vorhersagen macht.
Für einen Testlauf wirft sie 20 mal eine Münze und lässt die Maschine den Ausgang vorhersagen. In 13 der 20 Würfe sagt die Maschine das richtige Ergebnis voraus.

Sei X die Anzahl der von der Maschine korrekt geratenen Ergebnisse (aus $n = 20$ Versuchen). Zur Modellierung von X verwenden wir eine Binomialverteilung mit Parametern $n = 20$ und Erfolgswahrscheinlichkeit p, d.h. $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $n = 20$.

a) Gib die Null- und Alternativhypothese für den statistischen Test an. Begründe deine Wahl.

b) Gib die Verteilung unter H_0 an. Wird die Nullhypothese auf dem 1%-Signifikanzniveau verworfen?

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Nullhypothese verworfen wird, falls die Vorhersagewahrscheinlichkeit in Tat und Wahrheit $p = 0.75$ ist?

3. Die Anreicherung einer Legierung mit einem Metall soll den Volumenausdehnungskoeffizienten, der bei der Standardlegierung (ohne Anreicherung) 1.0085 beträgt, reduzieren. Um diese Hypothese nachzuprüfen, wurde der Koeffizient an 12 Proben der neuen Legierung bei gleicher Temperaturänderung gemessen, mit folgenden Ergebnissen:

1.00781	1.00646	1.00801	1.00833	1.00738	1.00687
1.00783	1.00936	1.00564	1.00543	1.00794	1.01060,

die zugehörigen empirischen Werte sind $\overline{x} = 1.00764$ und $s = 0.00146$, außerdem nehmen wir an dass diese Daten normalverteilt sind.

a) Konstruiere das 99%-Vertrauensintervall für den Parameter μ.

b) Lässt sich auf dem Niveau von 5% tatsächlich nachweisen, dass der Volumenausdehnungskoeffizient der neuen Legierung kleiner ist? Formuliere dazu geeignete Hypothesen, gib an ob der Test ein- oder zweiseitig ist, und führe den Test durch.

c) Berechne den p-Wert.

Wir idealisieren nun die Situation und nehmen an, dass $\sigma = 0.0014$ bekannt ist.

Siehe nächstes Blatt!

d) Konstruiere das 99%-Vertrauensintervall für den Parameter μ. Ist es grösser oder kleiner als das Vertrauensintervall von a)? Warum?

e) Führe den analogen Test zu b) durch. Wie lautet nun die Teststatistik und wie entscheidet dieser Test?

f) Berechne die Wahrscheinlichkeiten eines Fehlers 2. Art für den in d) bestimmten Test, wenn der wahre Wert $\mu = 1.008$ bzw. $\mu = 1.007$ ist.

g) Wie groß muss der Stichprobenumfang n gewählt werden, damit das Vertrauensintervall zum 5% Niveau schmäler als 0.0002 ist? Welcher empirisch gemessene Mittelwert würde dann schon zum Verwerfen der Nullhypothese führen?

4. Eine Klimaanlage schafft es, die Raumtemperatur bis auf eine Standardabweichung von einem halben Grad Celsius konstant zu halten. Die angestrebte Raumtemperatur beträgt 20.00 Grad Celsius. An zehn aufeinanderfolgenden Tagen wurden die folgenden Temperaturen gemessen:

20.71	19.76	20.56	21.39	21.00	19.67	20.92	20.31	20.39	20.72

Aus diesen Daten ergibt sich $\overline{x}_{10} = 20.543$.

a) Nehme an, dass die gemessenen Temperaturen unabhängig voneinander und identisch normalverteilt sind, und führe damit einen geeigneten Test auf dem 5%-Niveau durch, um zu beurteilen, ob die Klimaanlage wirklich auf den Sollwert von 20.00 Grad geeicht ist. Führe diesen Test durch mittels Berechnung des Verwerfungsbereiches.

b) Führe den Test nochmals durch, jetzt mittels Berechnung des p-Werts statt Berechnung des Verwerfungsbereichs.