ETH Zürich HS 2021
Neur. Syst. Comp., D-MATL, D-MAVT
Patrick Cheridito

Koordinatorin
Hanna Wutte

Stochastik
Serie 13

1. Alte Prüfungsaufgabe: Winter 2013

Am kommenden Samstag findet bei der alpinen Ski WM 2013 in Schladming die Abfahrt der Herren statt. Pro Nation dürfen jeweils 4 Läufer starten. Der Trainer der Schweizer Abfahrtsmannschaft hat bereits 3 Athleten fix nominiert. Für den letzten noch zu vergebenden Startplatz kann er sich nicht zwischen Carlo J. oder Patrick K. entscheiden. In weiser Voraussicht hatte er bereits zu Beginn der Saison angekündigt, dass in solchen Fällen getestet werden soll, ob die bis zur WM erreichten Saisonresultate statistisch signifikant unterschiedlich sind oder nicht. Falls ja, so darf der entsprechende Läufer (für den die Daten sprechen) starten, sonst entscheidet eine faire Münze. Die von den beiden Läufern in den bisherigen 8 Saisonabfahrten erzielten Zeiten (in Minuten:Sekunden) sind dabei wie folgt:

Abfahrt Nr. (i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Carlo (a_i)	1:52.43	2:02.37	1:20.78	1:38.67	2:34.23	1:57.13	1:43.14	1:50.88
Patrick (b_i)	1:53.20	2:03.40	1:20.66	1:39.13	2:33.41	1:58.58	1:42.82	1:51.04

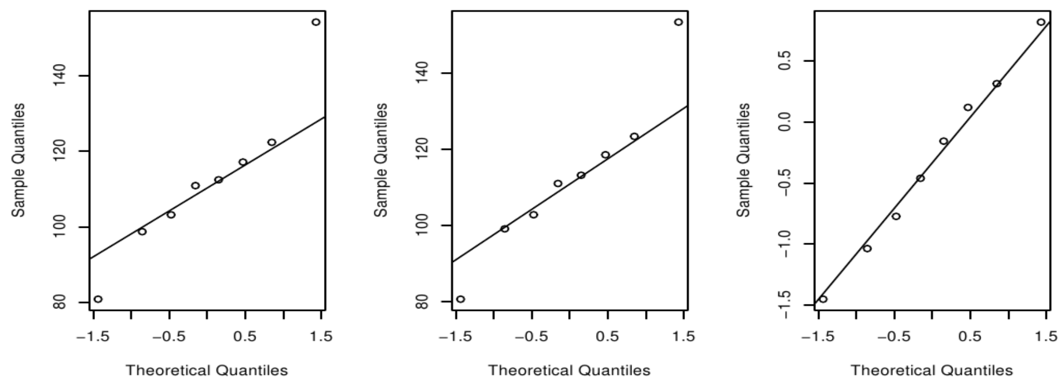
Wenn wir die Stichprobendifferenz mit $d_i := a_i - b_i$ $(i = 1, \dots, 8)$ bezeichnen, dann ergeben sich daraus die folgenden empirischen Kennwerte (in Sekunden): Mittelwert: $\overline{a}_8 = 112.45$, $\overline{b}_8 = 112.78$, $\overline{d}_8 = -0.33$. Streuung: $s_a = 21.21$, $s_b = 21.1$, $s_d = 0.75$. Gepoolte Streuung von a und b: $s_{pool} = 21.16$.

Es soll nun ein entsprechender Test entwickelt werden um zu prüfen, ob einer der beiden Skifahrer signifikant schneller ist. Und zwar so, dass für jeden einzelnen der beiden Kontrahenten, unter der Annahme er sei gleich schnell wie sein Konkurrent, die Wahrscheinlichkeit dass bereits durch den Test (also ohne dass es zu einem fairen Münzwurf kommt) gegen ihn entschieden wird, maximal 10% beträgt.

a) Ist die Stichprobe gepaart oder ungepaart? Ist der Test ein- oder zweiseitig? Wie lautet das Niveau α? Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu einem Münzwurf wenn beide Sportler gleich schnell sind?

Bitte wenden!

b) Die folgenden Graphiken sind QQ-Plots der Stichproben $(a_1, \ldots, a_8)$, $(b_1, \ldots, b_8)$ sowie $(d_1, \ldots, d_8)$ (in Sekunden).



Ist die Annahme der Normalverteilung für die für den Test relevanten Daten gerechtfertigt? Gib eine Begründung an. Welcher Test ist daher (unter den üblichen i.i.d. Annahmen) am besten geeignet?

c) Entwickle den Test, d.h. gib Null- und Alternativhypothese, die Teststatistik sowie den Verwerfungsbereich an.

d) Für welche Werte der Teststatistik würde (ohne dass es zu einem Münzwurf kommt) gegen Carlo entschieden werden?

e) Führe den Test durch. Wie entscheidet der Test? Kommt es zu einem Münzwurf oder nicht?

2. Die Anzahl X^{CH} der Bestellungen, die in der Schweiz pro Sekunde bei Amazon aufgegeben werden, ist Poisson-verteilt mit Ratenparameter $\lambda > 0$. Wir möchten diese Rate gerne schätzen.

a) Gib die Likelihoodfunktion $L(\lambda | x_1, \ldots, x_n)$ für n Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ an. Bestimme den Maximum-Likelihood Schätzer $\hat{\lambda}^{\text{MLE}}$ als Funktion von x_i, $i = 1, \ldots, n$. Nenne den konkreten Schätzwert, wenn innerhalb einer Minute (d.h. $n = 60$) 2100 Bestellungen aufgegeben werden.

Wir nehmen an, dass auch die Anzahl X^{AT} der Bestellungen, die im Nachbarland Österreich pro Sekunde bei Amazon aufgegeben werden, Poisson-verteilt ist mit dem selben Ratenparameter $\lambda > 0$, d.h.

$$X^{AT} \sim \text{Poi}(\lambda).$$

Ausserdem nehmen wir an, dass X^{CH} und X^{AT} unabhängig sind.

Siehe nächstes Blatt!

b) Was ist die Verteilung der Gesamtzahl der in der Schweiz und Österreich pro Sekunde aufgegebenen Bestellungen? Begründe deine Antwort.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in Österreich und der Schweiz genau 70 Bestellungen pro Sekunde aufgegeben werden, gegeben, dass die Anzahl der Bestellungen pro Sekunde in Österreich 36 beträgt. Gib die Antwort als Funktion von λ an.

Wirtschaftsforscher sind skeptisch gegenüber der Unabhängigkeitsannahme. Sie vermuten, dass ein linearer Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bestellungen in der Schweiz X^{CH} und jener der Bestellungen in Österreich X^{AT} besteht.

d) Formuliere das einfache lineare Regressionsmodell mit Zielvariable X^{CH} und n Realsierungen $x_1^{AT}, \ldots, x_n^{AT}$ der erklärenden Variable X^{AT}. Wie lauten die Annahmen an den Fehlerterm?

Ein Computer-Output liefert für Stichprobengrösse $n = 10$ folgende Werte für die geschätzten Regressionsparameter, den Standardfehler, und die realisierte Teststatstik eines t-Tests (unter der Nullhypothese ist der jeweilige Parameter gleich Null), sowie den zugehörigen p-Wert.

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.58659    0.66707   0.879    0.405
x_at         1.49441    0.01972  75.779 1.02e-12
```

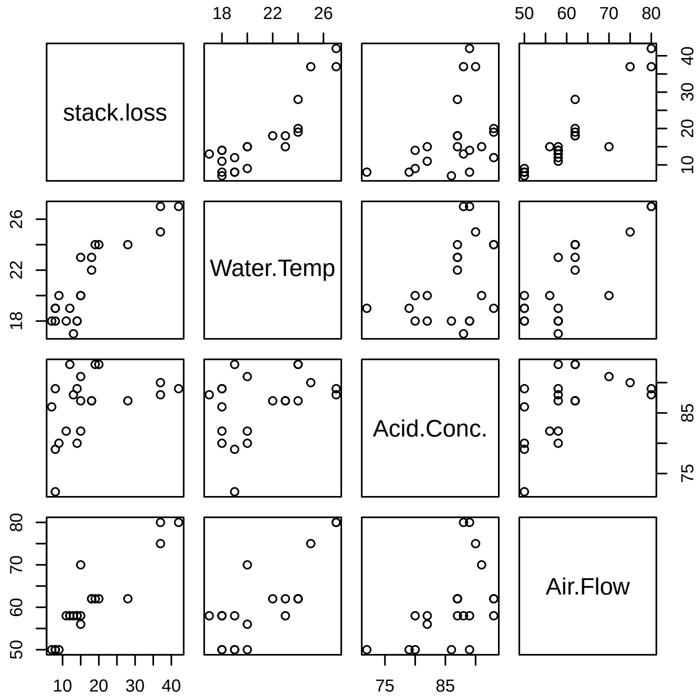
e) Begründe anhand der Daten, dass die Steigung der Regressionsgeraden auf dem 5%-Niveau signifikant von Null verschieden ist.

f) Berechne anhand der Daten das 95%-Konfidenzintervall für den Steigungsparameter der Regressionsgeraden.

3. Das Datenset stackloss enthält Datenerhebungen in der Nähe einer Firma, die Ammonium zu Stickstoff konvertiert. Es besteht aus den vier Kenngrössen Luftzug (air.flow), Wassertemperatur (water.temp), Säurekonzentration (acid.conc) und Ammoniumverlust (stack.loss). Die Kenngrösse Ammoniumverlust misst die Menge an Ammonium, die in die Umgebung entweicht bevor sie verarbeitet werden kann.

Betrachte die folgenden paarweisen Scatterplots der Daten, und beurteile die folgenden Aussagen.

Bitte wenden!



a) Die Scatterplots deuten darauf hin, dass ein linearer Zusammenhang zwischen Ammoniumverlust und Wassertemperatur besteht.

b) Die Scatterplots deuten darauf hin, dass ein linearer Zusammenhang zwischen Ammoniumverlust und Luftzug besteht.

c) Die Scatterplots deuten darauf hin, dass ein linearer Zusammenhang zwischen Ammoniumverlust und Säurekonzentration besteht.

Wir vermuten, dass der Ammoniumverlust als lineare Funktion von Wassertemperatur und Luftzug dargestellt werden kann. Eine multiple lineare Regression kommt zu folgendem Ergebnis.

Beurteile folgende Aussagen.

d) Der F-Test prüft die Nullhypothese, dass entweder Luftzug oder Wassertemperatur in der Regression weggelassen werden kann.

e) Ein F-Test mit Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art von 1% verwirft die Nullhypothese.

f) Der t-Test prüft für jeden einzelnen Parameter die Nullhypothese, dass er nicht weggelassen werden kann.

```
Call:
lm(formula = stackloss$stack.loss ~ stackloss$Air.Flow + stackloss$Water.Temp)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-7.5290 -1.7505  0.1894  2.1156  5.6588

Coefficients:
                     Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)          -50.3588     5.1383  -9.801 1.22e-08 ***
stackloss$Air.Flow     0.6712     0.1267   5.298 4.90e-05 ***
stackloss$Water.Temp   1.2954     0.3675   3.525  0.00242 **
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 3.239 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9088,    Adjusted R-squared:  0.8986
F-statistic: 89.64 on 2 and 18 DF,  p-value: 4.382e-10
```

g) Die Nullhypothese, dass die Variable Wassertemperatur in der Regression weggelassen werden kann, wird am 0.1% Niveau verworfen.

h) Die Nullhypothese, dass die Variable Luftzug in der Regression weggelassen werden kann, kann am 0.1% Niveau nicht verworfen werden.