ETH Zürich HS 2021
Neur. Syst. Comp., D-MATL, D-MAVT
Patrick Cheridito

Koordinatorin
Hanna Wutte

Stochastik
Serie 2

1. Wir werfen eine (faire) Münze 2 mal und betrachten folgende Ereignisse:

- A_1 : "der erste Wurf ist Kopf",
- A_2 : "der zweite Wurf ist Kopf",
- A_3 : "beide Würfe sind gleich".

a) Berechne $\mathbb{P}(A_i)$, $i = 1, 2, 3$.

b) Sind A_1 und A_2 unabhängig? Sind A_1 und A_3 unabhängig? Sind A_2 und A_3 unabhängig?

c) Sind A_1 und A_2^c unabhängig? Sind A_1 und A_3^c unabhängig? Beweise oder widerlege die folgende Aussage: Wenn A und B unabhängig sind, dann sind auch A und B^c unabhängig.
Tipp: Begründe und verwende $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

d) Sind A_1, A_2 und A_3 unabhängig? Sind sie paarweise unabhängig? Was können wir daraus schließen?

2. **a)** Der Einsturz eines Gebäudes in Tokio kann durch zwei voneinander unabhängige Ereignisse verursacht werden:

- E_1: ein grosses Erdbeben
- E_2: ein starker Taifun

Die jährlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten dieser beiden Ereignisse sind $\mathbb{P}(E_1) = 0.04$ und $\mathbb{P}(E_2) = 0.08$.

i) Berechne die jährliche Einsturzwahrscheinlichkeit des Gebäudes.

ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gebäude innerhalb der nächsten 5 Jahre einstürzt? Ist es realistisch dieses Problem als binomialverteilt anzunehmen? Begründe.

Zur Erinnerung: Die Binomialverteilung mit Paramatern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$ ist die Anzahl "Erfolge" in n unabhängigen Wiederholungen eines "Experiments" mit "Erfolgswahrscheinlichkeit" p.

b) Der technische Dienst erklärt einem ETH-Professor, dass die Chance im Lift steckenzubleiben nur $\frac{1}{10000}$ sei. Der Professor geht 45 Wochen im Jahr, 5 Tage pro Woche zur Arbeit und benützt dabei den Lift täglich zweimal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er innerhalb seines 10-jährigen Arrangements an der ETH niemals, einmal, zweimal im Lift stecken bleibt? Welche vernünftige Annahme wird man machen um die Rechnung durchführen zu können?

3. Eine Versicherungsgesellschaft teilt ihre Kunden anhand der Schadeneintrittswahrscheinlichkeiten in drei Kategorien ein, wobei ein Kunde zu genau einer Kategorie gehört. In der folgenden Tabelle sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für jede Kategorie gegeben (beispielsweise verursachen gute Risiken mit Wahrscheinlichkeit 1% einen Schaden).

Kategorie	Wahrscheinlichkeit
Gute Risiken	1%
Mittlere Risiken	5%
Teure Risiken	10%

Der Anteil der guten Risiken betrage 40%, 50% seien mittlere Risiken und 10% teure Risiken.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Kunde einen Schaden verursacht?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Kunde, der einen Schaden verursacht hat, ein gutes Risiko?

c) Welcher Anteil der Kunden verursacht einen Schaden und gehört nicht zur teuren Kategorie?

4. (**Dies ist eine leicht modifizierte Prüfungsaufgabe aus dem Sommer 2013**)
Anton hat ein gutes Gespür dafür, wo es Öl im Boden hat. Er überprüft im Auftrag einer Ingenieurfirma diverse Standorte. Aus Erfahrung weiss man, dass bei den vorliegenden Standorten jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/3 wirklich Öl vorhanden ist. Dieses Ereignis bezeichnen wir mit W ("Wirklich"), d.h. es gilt $\mathbb{P}(W) = 1/3$. Das Ereignis, dass Anton an einem Standort Öl vermutet, bezeichnen wir mit G ("Gespür").

Falls an einem Standort tatsächlich Öl vorliegt, erkennt dies Anton mit Wahrscheinlichkeit 0.75 (d.h. $\mathbb{P}(G \mid W) = 0.75$). Entsprechend sagt Anton mit Wahrscheinlichkeit 0.9, dass kein Öl vorliegt, falls in Tat und Wahrheit wirklich kein Öl da ist (d.h. $\mathbb{P}(G^c \mid W^c) = 0.9$).

a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(G \mid W^c)$ und $\mathbb{P}(G)$.

b) Anton vermutet, dass an einem Standort Öl vorhanden ist (Ereignis G). Wie gross ist dann die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich Öl vorhanden ist?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anton die Lage an einem Standort falsch einschätzt? (Das heisst: er vermutet, dass kein Öl vorhanden ist und tatsächlich welches da ist, oder er vermutet, dass Öl vorhanden ist und keines da ist.)

d) Wir schicken Anton zu Testzwecken an 10 Standorte, bei denen wir wissen, dass tatsächlich Öl vorhanden ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anton mindestens einmal angibt, dass kein Öl vorhanden ist? Die Entscheidungen an den verschiedenen Standorten können als unabhängig voneinander angenommen werden.