

Stochastik

Serie 3

1. Wir betrachten eine Krankheit, zu der es einen Test beim Arzt gibt. Wir wissen, dass 0.1% der Bevölkerung die Krankheit haben. Bei erkrankten Personen ist der Test zu 98% positiv. Bei gesunden Personen ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test fälschlicherweise positiv ist 1%. Sei

- A := “Der Test ist positiv”
- B := “Man ist krank”.

Wie oben beschrieben, wissen wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 0.001, \\ \mathbb{P}(A|B) &= 0.98, \\ \mathbb{P}(A|B^c) &= 0.01.\end{aligned}$$

Peter hat einen Test beim Arzt gemacht. Dieser ist positiv ausgefallen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter tatsächlich die Krankheit hat?

- a) Rate die Antwort.
- b) Berechne die Antwort mittels Bayes Formel.
- c) Die Antwort in Teil b) war eventuell niedriger als in Teil a). Fülle die folgende Tabelle für 100'000 Menschen gemäss den gegebenen Wahrscheinlichkeiten aus, um die Antwort aus b) zu verifizieren:

	B	B^c	Summe
A			
A^c			
Summe			100'000

2. a) Sei X eine diskrete Zufallsvariable, welche nur die Werte $W = \{1, \pi, 7, 8.6, 11\}$ annimmt. Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{16}, \quad \mathbb{P}(X = \pi) = \frac{3}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 7) = \frac{1}{8}, \quad \mathbb{P}(X = 8.6) = \frac{1}{4}.$$

- (i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = 11)$?
 - (ii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass X einen ganzzahligen Wert annimmt?
 - (iii) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$.
 - (iv) Berechne die Standardabweichung σ_X .
 - (v) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}(\ln X)$.
- b) Es sei $X \sim \text{Bin}(10, 1/3)$, P_X die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X und F die kumulative Verteilungsfunktion von X .
- (i) Berechne $P_X(1)$, $F(1.5)$ und $F(2)$.
 - (ii) Ist F stetig? Begründe.
 - (iii) Berechne den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$, die Standardabweichung σ_X und die Varianz $\mathbb{V}(X)$.
3. Bei einer Untersuchung werden Wasserproben (10ml) auf Verunreinigungen untersucht. Da nur 2 Prozent aller Proben verunreinigt sind, wird vorgeschlagen, von 10 Einzelproben jeweils die Hälfte (5ml) der Probe zu einer Sammelprobe (50ml) zusammenzumischen und zunächst nur die Sammelprobe zu untersuchen. Wird in der Sammelprobe keine Verunreinigung festgestellt, so ist die Untersuchung für die 10 Einzelproben beendet. Im anderen Fall werden alle 10 übriggebliebenen Hälften in 10 Einzeluntersuchungen geprüft.
- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in der Sammelprobe keine Verunreinigung zu finden (unter der Annahme, dass die Einzelproben unabhängig voneinander sind)?
 - b) Sei die Zufallsvariable Y die Gesamtzahl benötigter Analysen. Welche Werte kann Y annehmen, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?
 - c) Wieviele Analysen werden “im Durchschnitt” für die gesamte Untersuchung benötigt (d.h. wie gross ist $\mathbb{E}(Y)$)? Wieviele Analysen werden durch die Bildung von Sammelproben “im Durchschnitt” eingespart?
4. Für eine externe Benutzergruppe, der auch Franz angehört, stehen an der ETH vier Rechner zur Verfügung, wobei jedem Benutzer beim Einloggen jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ unabhängig von den anderen einer der Rechner zugeteilt wird. Es kann also durchaus vorkommen, dass mehrere Leute auf dem gleichen Rechner arbeiten.
- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Person auf dem gleichen Rechner arbeitet wie Franz, wenn ausser ihm genau 10 Personen eingeloggt sind?

Siehe nächstes Blatt!

- b) Wieviele Leute dürfen sich ausser Franz noch einloggen, damit er mindestens mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ allein auf einem Rechner arbeitet?
- c) (**Zusatz**) Wir nehmen nun an, dass jeder Rechner unabhängig von den anderen nur mit Wahrscheinlichkeit 0.9 funktioniert, wobei die Benutzer analog wie vorher auf die funktionierenden Rechner "verteilt" werden (d.h. wenn gewisse Rechner nicht funktionieren, werden die Benutzer auf die Verbliebenen "verteilt"). Gegeben, dass ausser Franz drei Leute eingeloggt sind und genau zwei davon auf dem gleichen Rechner arbeiten wie er, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass alle Rechner funktionieren?

Tipp: Sei X die Anzahl funktionierender Rechner und S_3 die Anzahl der Personen, die ausser Franz auf seinem Rechner arbeiten. Bestimme für $k = 2, 3, 4$ die W'keiten $\mathbb{P}(S_3 = 2|X = k)$ aus der Annahme wie die Benutzer auf die Rechner "verteilt" werden und benutze diese W'keiten um mit dem Satz der totale Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_3 = 2)$ zu berechnen. Mit dem Satz von Bayes erhält man dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit.