ETH Zürich HS 2021
Neur. Syst. Comp., D-MATL, D-MAVT
Patrick Cheridito

Koordinatorin
Hanna Wutte

Stochastik
Serie 5

1. Aufgrund langjähriger Untersuchungen ist bekannt, dass der Bleigehalt X in einer Bodenprobe annähernd normalverteilt ist. Ausserdem weiss man, dass der Erwartungswert 32 ppb beträgt und dass die Standardabweichung 6 ppb beträgt.

a) Mache eine Skizze der Dichte von X und zeichne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe zwischen 26 und 38 ppb Blei enthält, in die Skizze ein.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 40 ppb Schwermetall enthält? Berechne *ohne* Taschenrechner.
Hinweis: Gehe zur standardisierten Zufallsvariablen Z über und benutze die Tabelle der Standardnormalverteilung.

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 27 ppb Schwermetall enthält?

d) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97.5% unterschritten? Das heisst, bestimme dasjenige c, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Bleigehalt kleiner oder gleich c ist, genau 97.5% beträgt.

e) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% unterschritten?

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, die in Aufgabe a) eingezeichnet wurde?

2. Die Geschwindigkeit X eines Teilchens der Masse m sei durch die sogenannte *Rayleigh Verteilung* modelliert, d.h. X hat die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

a) Zeige, dass f eine Dichte ist.

b) Berechne die kumulative Verteilungsfunktion F_X von X.

c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen eine Geschwindigkeit zwischen 2 und 5 besitzt.

d) Berechne die kumulative Verteilungsfunktion der kinetischen Energie $Y = \frac{1}{2}mX^2$. Bestimme den Erwartungswert von Y. Wie heisst die Verteilung von Y?

3. Ein System bestehe aus 2 Maschinen, welche voneinander unabhängige Lebensdauern T_1 und T_2 besitzen mit Dichten (Die Maßeinheit von t sei Stunden)

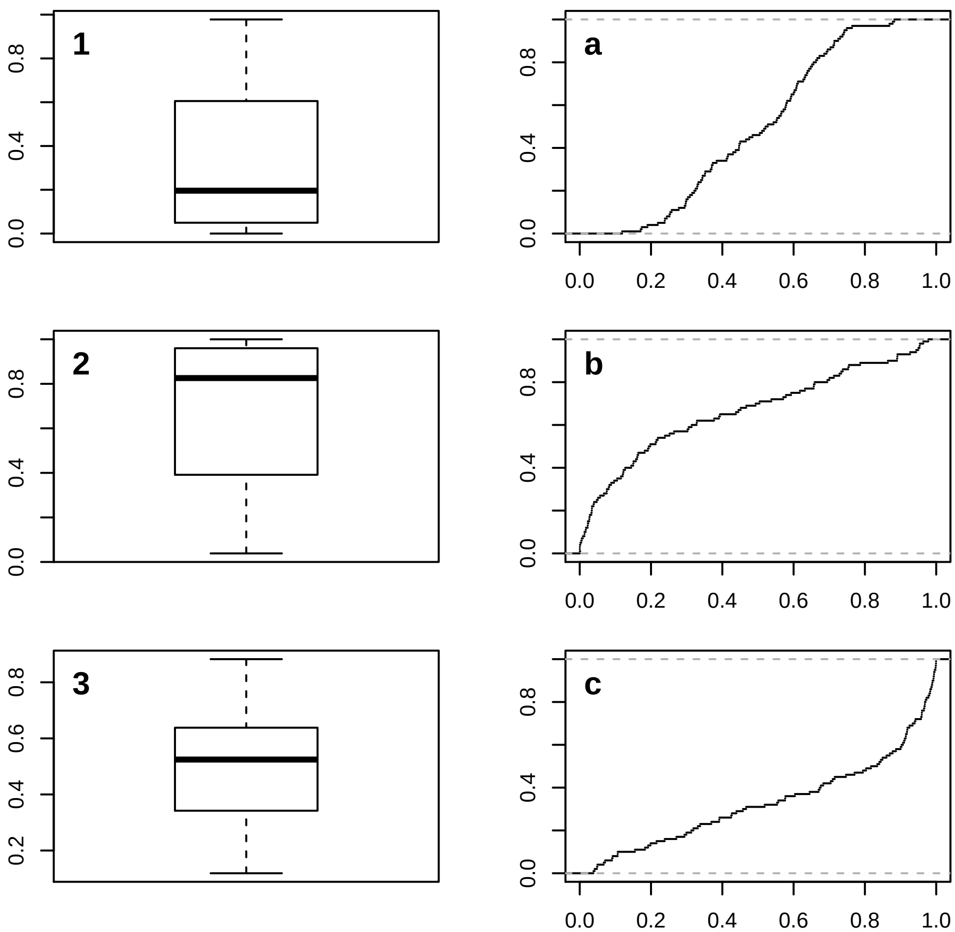
$$f_{T_1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1000}\exp(-\frac{1}{1000}\,t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f_{T_2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1500}\exp(-\frac{1}{1500}\,t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nach 200 Stunden beide Maschinen noch funktionieren.

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nach 200 Stunden noch mindestens eine Maschine funktioniert.

c) Angenommen Maschine 1 funktioniert noch nach 200 Stunden, was ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie noch weitere 200 Stunden funktioniert. Können wir daraus eine allgemeine Aussage für die Exponentialverteilung ableiten?

4. Für drei Stichproben vom Umfang n = 100 wurden je ein Boxplot und die empirische Verteilungsfunktion gezeichnet. Ordne die Boxplots den entsprechenden empirischen Verteilungsfunktionen zu:



5. Gegeben seien die folgenden Daten:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_i	2.75	7.47	1.72	-0.45	6.12	0.16	-1.13	0.55	0.54	0.00	-0.47	0.83	2.30	0.77	16.85

a) Zeichne von Hand ein Histogramm der Daten. Bilde dazu Klassen $(c_{k-1}, c_k]$, $k = 1, \dots, 10$ mit $c_0 = -2, c_1 = 0, c_2 = 2, c_3 = 4, \dots, c_9 = 16, c_{10} = 18$. Was kann man über die Verteilung der Daten aussagen (Symmetrie, extreme Werte)?

b) Bestimme den Mittelwert, den Median und die Standardabweichung der Daten.

c) Beim Wert $x_{15} = 16.85$ könnte es sich um einen Schreibfehler handeln. Ersetze x_{15} durch den Wert 6.85 und berechne erneut den Mittelwert, den Median und die Standardabweichung. Was stellst du fest?

6. Für fünf Stichproben vom Umfang $n = 100$ wurden je ein Histogramm und ein Boxplot gezeichnet. Ordne die fünf Boxplots den entsprechenden Histogrammen zu. Gib für jede Zuordnung eine kurze Begründung!