ETH Zürich HS 2021
Neur. Syst. Comp., D-MATL, D-MAVT
Patrick Cheridito

Koordinatorin
Hanna Wutte

Stochastik
Serie 6

1. Betrachte die folgenden 10 Datenpunkte $x_1, \ldots, x_{10}$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0.42	0.45	3.11	1.33	1.68	0.09	2.02	5.35	0.71	2.29

a) Bestimme den Mittelwert und die empirische Standardabweichung der Datenpunkte $x_1, \ldots, x_{10}$.

b) Bestimme den Median und das obere Quartil der Datenpunkte $x_1, \ldots, x_{10}$.

2. In einer Studie an Ehepaaren einer hessischen Landbevölkerung wurde untersucht, ob eine Beziehung zwischen Körperbau und Gattenwahl besteht. Es wurden bei Ehegatten die Körperbautypen *1 (leptosom, schmächtig), 2 (athletisch)* und *3 (pyknisch, fettleibig)* unterschieden. Die unten stehende Tabelle zeigt die entsprechende gemeinsame Verteilung von X (Körperbau Mann) und Y (Körperbau Frau).

Körperbautyp des Ehemannes	Körperbautyp der Ehefrau		
	1 leptosom	2 athletisch	3 pyknisch
1 leptosom	11.6%	4.5%	7.6%
2 athletisch	7.1%	46.0%	7.6%
3 pyknisch	4.5%	a	9.8%

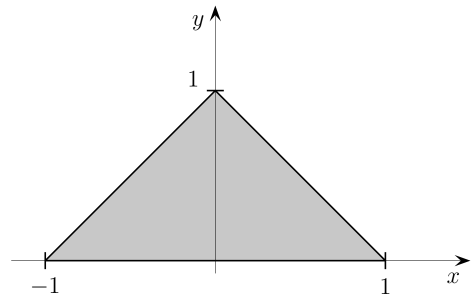
a) Bestimme den fehlenden Wert a.

b) Berechne die Randverteilungen, d.h. die Verteilung von X und die Verteilung von Y.

c) Berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \leq 2 | Y \leq 2)$.

d) Berechne die gemeinsame Verteilung von X und Y unter Annahme der Unabhängigkeit. Benutze dazu die Randverteilungen aus **b)** und vergleiche dann die Werte mit obiger Tabelle.

Bitte wenden!



3. Die gemeinsame Dichte der beiden Zufallsvariablen X und Y sei konstant gleich c auf dem grauen Dreieck und 0 ausserhalb.

a) Bestimme die gemeinsame Dichtefunktion $f_{X,Y}$.

b) Bestimme die beiden Randdichten.

Tipp: Unterscheide bei der Rechnung zwischen den Regionen $\{x < -1\}$; $\{-1 \leq x < 0\}$; $\{0 \leq x < 1\}$ und $\{1 \leq x\}$.

c) Bestimme $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$ und $\mathbb{V}(Y)$.

d) Bestimmen die Kovarianz zwischen X und Y. Sind X und Y unabhängig? Begründe Deine Antwort.

e) Gegeben $X = 0.5$, was ist der bedingte Erwartungswert von Y?

4. Wenn an der Tramhaltestelle "ETH/Universitätsspital" je ein in Richtung Bahnhof fahrendes Tram der Linien 6 und 10 mit weniger als $\tau = 30s$ zeitlichem Abstand eintreffen, wird eines ausgebremst und muss auf offener Strecke warten; wir bezeichnen dies als "Kollision".

Im abendlichen Stossverkehr fahren Trams nicht mehr nach Fahrplan, sondern zufällig. Wir nehmen an, dass zwei Trams (eines von Linie 6, eines von Linie 10) unabhängig und über die Zeit $[0, T]$ ($T = 5\text{min}$) uniform verteilt eintreffen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit einer Kollision?

Tipp: Zeichne ein $[0, T] \times [0, T]$ Viereck wo jede Achse der Ankunftszeit eines Trams entspricht. Finde das Gebiet auf dem Viereck wo es zur Kollision kommt.

5. Seien X und Y die Lebensdauern zweier Maschinen, "Maschine 1" bzw. "Maschine 2", in Monaten. Die beiden Variablen sind unabhängig und exponentialverteilt:

$$X \sim \text{Exp}(\lambda_1), \quad Y \sim \text{Exp}(\lambda_2)$$

Siehe nächstes Blatt!

a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Maschine 1 maximal einen Monat länger funktioniert als Maschine 2, wenn $\lambda_1 = \frac{1}{10}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{15}$?

b) Sei weiterhin $\lambda_1 = \frac{1}{10}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{15}$. Wenn man weiss, dass Maschine 1 nach 4 Monaten kaputt war, was ist dann die erwartete Lebensdauer der Maschine 2?

c) (**Zusatz**) Wir nehmen nun an, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{10} := \lambda$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen die Maschinen im gleichen Monat kaputt?