D-MATH
Prof. Richard Pink

Lineare Algebra I

HS 2021

Musterlösung Serie 1

Aussagen- und Prädikatenlogik

1. Welche der folgenden Aussagen ist ein gültiger logischer Einwand gegen das Sprichwort „Alles verstehen heisst alles verzeihen“? (Interpretiere das Wort „heisst“ im Sinne von „impliziert“.)

   (a) Niemand versteht alles.

   (b) Ich verstehe die Eifersucht, aber ich kann sie nicht verzeihen.

   (c) Ich verstehe alles, aber die Eifersucht kann ich nicht verzeihen.

   (d) Niemand würde alles verzeihen.

   (e) Ich verzeihe die Eifersucht, obwohl ich sie nicht verstehe.

   Lösung: Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Personen, und sei $\mathcal{T}$ die Menge der Taten und Fakten, die es zu verstehen oder zu verzeihen gibt. Dann bedeutet die Aussage Z der Aufgabe also

$$\forall P \in \mathcal{P} : \big(\forall t \in T\colon P \text{ versteht } t\big) \to \big(\forall t \in T\colon P \text{ verzeiht } t\big). \tag{1}$$

   Seien weiterhin

$$\begin{aligned} A &:= \{P \in \mathcal{P} \mid \forall\, t \in \mathcal{T}\colon P \text{ versteht } t\}, \\ B &:= \{P \in \mathcal{P} \mid \forall\, t \in \mathcal{T}\colon P \text{ verzeiht } t\}. \end{aligned}$$

   Dann ist Z äquivalent zu

$$A \subset B. \tag{2}$$

   Sei nun $P \in \mathcal{P}$ die Person, die den jeweiligen Einwand vorbringt.

   (a) Die Aussage „Niemand versteht alles“ ist äquivalent dazu, dass die Menge A leer ist. Dies impliziert offenbar (2), ist also kein gültiger Einwand.

   (b) Aus „ich kann die Eifersucht nicht verzeihen“ folgt $P \notin B$. Aber aus „ich verstehe die Eifersucht“ folgt nicht automatisch $P \in A$, denn vielleicht versteht P die Völlerei nicht. Da also die Möglichkeit besteht, dass P nicht alles versteht, ist das kein gültiger Einwand.

   (c) Die Aussage „Ich verstehe alles“ bedeutet, dass der Sprecher P in der Menge A ist. Aus der Aussage „die Eifersucht kann ich nicht verzeihen“ folgt $P \notin B$. Also gilt in diesem Fall $A \not\subset B$, und wir haben einen gültigen Einwand.

(d) Die Aussage „Niemand würde alles verzeihen“ bedeutet, dass B leer ist. Dies ist kein Widerspruch zu (2), da zum Beispiel auch die Menge A leer sein kann. Wir haben hier also keinen gültigen Einwand.

(e) Die Aussage, dass „ich die Eifersucht nicht verstehe“, impliziert $P \notin A$. Mit P kann man daher keinesfalls die Aussage (2) widerlegen, wir haben also keinen gültigen Einwand. Ob P die Eifersucht verzeiht oder nicht, oder ob überhaupt $P \in B$ ist, ist dafür irrelefant.

2. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen $A \to B$ und $\neg B \to \neg A$ mit Hilfe einer Wahrheitstafel. Geben Sie ein Beispiel für diese Äquivalenz aus dem täglichen Leben.

Lösung: Mit 1 für wahr und 0 für falsch finden wir schrittweise die Wahrheitswerte

A	B	$A \to B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \to \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Da die dritte Spalte gleich der letzten ist, sind die Aussagen äquivalent.

Ein Beispiel: „Wenn es regnet, wird der Rasen nass.“ Dies ist äquivalent zu der Überlegung: „Wenn der Rasen nicht nass ist, kann es nicht regnen.“

3. Seien A, B, C Aussagen. Vereinfachen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge C)$

(b) $(A \wedge B) \vee \neg(A \vee \neg B)$

(c) $(A \to B) \vee (B \to C)$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} & A \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge C) \\ \iff\; & (A \vee (A \wedge B)) \vee (A \wedge (B \wedge C)) && \text{(Assoziativität)} \\ \iff\; & A \vee (A \wedge (B \wedge C)) && \text{(Absorption)} \\ \iff\; & A && \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} & (A \wedge B) \vee \neg(A \vee \neg B) \\ \iff\; & (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) && \text{(de Morgan)} \\ \iff\; & (A \vee \neg A) \wedge B && \text{(Distributivität)} \\ \iff\; & \text{wahr} \wedge B \\ \iff\; & B \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$
\begin{aligned}
& (A \to B) \vee (B \to C) & \\
\iff\; & (\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee C) & \text{(Definition)} \\
\iff\; & \neg A \vee (B \vee \neg B) \vee C & \text{(Assoziativität)} \\
\iff\; & \neg A \vee \text{wahr} \vee C & \\
\iff\; & \text{wahr} &
\end{aligned}
$$

4. Wählen Sie irgendeine Aussage mit mindestens 3 Quantoren aus dem täglichen Leben (am besten aus einem völlig anderen Bereich — es soll ja Spass machen). Drücken Sie sie einmal nur in Worten und einmal in logischen Symbolen aus. Tun Sie dasselbe mit der Negation der Aussage. Geben Sie ein Beispiel dafür, welche nicht äquivalente Aussage herauskommen kann, wenn Sie die Reihenfolge der Quantoren oder die Klammerung verändern.

   Lösung: Als Beispielsatz verwenden wir

   Keiner kann immer alles wissen.

   Bezeichne die Menge aller Personen mit $\mathcal{P}$, die Menge aller Zeitmomente mit $\mathcal{T}$, die Menge aller Fakten mit $\mathcal{Y}$, und sei $\text{Weiss}(P, y, t)$ die Aussage „P weiss y zur Zeit t“. Dann lässt sich die Aussage wie folgt in Quantoren übersetzen:

   $$\neg\big(\exists P \in \mathcal{P}\colon \forall t \in \mathcal{T}\colon \forall y \in \mathcal{Y}\colon \text{Weiss}(P, y, t)\big).$$

   Dies ist äquivalent zu

   $$\forall P \in \mathcal{P}\colon \exists t \in \mathcal{T}\colon \exists y \in \mathcal{Y}\colon \neg\text{Weiss}(P, y, t).$$

   Die Negation ist

   $$\exists P \in \mathcal{P}\colon \forall t \in \mathcal{T}\colon \forall y \in \mathcal{Y}\colon \text{Weiss}(P, y, t),$$

   d.h., es gibt jemanden, der jederzeit alles weiss.

   Eine Vertauschung der Quantoren liefert zum Beispiel

   $$\neg\big(\forall t \in \mathcal{T}\colon \forall y \in \mathcal{Y}\colon \exists P \in \mathcal{P}\colon \text{Weiss}(P, y, t)\big).$$

   Dies ist äquivalent zu

   $$\exists t \in \mathcal{T}\colon \exists y \in \mathcal{Y}\colon \forall P \in \mathcal{P}\colon \neg\text{Weiss}(P, y, t),$$

   d.h., es gibt eine Sache, die zu einem bestimmten Zeitpunkt niemand weiss.

   Eine andere Vertauschung liefert zum Beispiel

   $$\forall t \in \mathcal{T}\ \forall y \in \mathcal{Y}\ \nexists P \in \mathcal{P}\colon \text{Weiss}(P, y, t),$$

   das heisst: Keiner weiss jemals überhaupt irgendetwas.

5. Formulieren Sie die Aussagen „es gibt keine grösste natürliche Zahl“ und „für jede natürliche Zahl n gibt es eine strikt grössere natürliche Zahl“ in Prädikatenlogik. Zeigen Sie durch Umformung in Prädikatenlogik die Äquivalenz beider Aussagen.

   Lösung: „Es gibt keine grösste natürliche Zahl“ heisst in Formelsprache

$$\neg(\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m \geqslant n).$$

   „Für jede natürliche Zahl n gibt es eine strikt grössere natürliche Zahl“ heisst

$$\forall\ m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > m.$$

   Die Äquivalenz dieser Aussagen ergibt sich aus den Umformungen

$$\begin{aligned} & \neg(\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : m \geqslant n) \\ \iff\ & \forall m \in \mathbb{N} : \neg(\forall n \in \mathbb{N} : m \geqslant n) \\ \iff\ & \forall m \in \mathbb{N} : \exists\ n \in \mathbb{N} : \neg(m \geqslant n) \\ \iff\ & \forall m \in \mathbb{N} : \exists\ n \in \mathbb{N} : n > m. \end{aligned}$$