Musterlösung Serie 2

Relationen, Ringe, Körper

1. Bestimmen Sie für jede der folgenden Relationen auf $\mathbb{R}^2$, ob sie eine Teilordnung bzw. eine Totalordnung ist.

   (a) $(a,b) \preceq (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; a \leqslant c.$

   (b) $(a,b) \preceq (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; a \leqslant c$ und $b \geqslant d.$

   Lösung:

   (a) Die Relation ist keine Teilordnung, da sie nicht antisymmetrisch ist. Zum Beispiel gilt $(1,2) \preceq (1,3)$ und $(1,3) \preceq (1,2)$, aber $(1,2) \npreceq (1,3)$.

   (b) Die Relation ist eine Teilordnung; die Reflexivität, Antisymmetrie und Transitivität verifiziert man durch direkte Rechnung. Zum Beispiel für die Antisymmetrie: Betrachte (a,b) und $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a,b) \preceq (c,d)$ und $(c,d) \preceq (a,b)$. Nach Definition der Relation gilt dann $a \leqslant c$ und $b \geqslant d$, sowie $c \leqslant a$ und $d \geqslant b$. Daraus folgt $a = c$ und $b = d$ und damit $(a,b) = (c,d)$. Daher ist die Relation antisymmetrisch.

   Die Relation ist aber keine Totalordnung, da beispielsweise $(1,1)$ und $(2,2)$ nicht vergleichbar sind.

*2. Zwei (teilweise oder total) geordnete Mengen $(X, \leqslant)$ und $(X', \leqslant')$ heißen *isomorph* genau dann, wenn es eine Bijektion $f\colon X \to X'$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$x \leqslant y \iff f(x) \leqslant' f(y).$$

   (a) Zeige: Wenn $(X, \leqslant)$ ein grösstes (bzw. kleinstes) Element besitzt, so tut es jede dazu isomorphe geordnete Menge ebenfalls.

   (b) Eine Ordnung heisst *dicht*, wenn für je zwei Elemente x und y mit $x < y$ ein z existiert mit $x < z < y$. Zeige: Ist eine Ordnung dicht, so gilt dasselbe für jede dazu isomorphe geordnete Menge.

   (c) Welche der Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$, $\mathbb{Z}^{\leqslant 0}$, $\mathbb{Q}$ mit der Einschränkung der üblichen Ordnungsrelation $\leqslant$ sind zueinander isomorph?

   (d) Konstruiere eine abzählbar unendliche Menge mit einer Totalordnung, die zu keiner der geordneten Mengen in (c) isomorph ist.

   Lösung: Sei $f\colon X \to X'$ ein Isomorphismus mit der genannten Eigenschaft.

(a) Sei x ein grösstes Element von X. Da f surjektiv ist, gibt es für jedes $y' \in X'$ ein $y \in X$ mit $f(y) = y'$. Für dieses gilt $y \leqslant x$, und nach der Bedingung an f daher auch $y' = f(y) \leqslant' f(x)$. Somit ist $f(x)$ ein grösstes Element von $(X', \leqslant')$. Der Beweis für das kleinste Element geht analog mit $\geqslant$ anstatt $\leqslant$.

(b) Sei $(X, \leqslant)$ dicht. Für je zwei Elemente x', $y' \in X'$ mit $x' <' y'$ gilt dann $f(f^{-1}(x')) = x' <' y' = f(f^{-1}(y'))$, nach der Bedingung an f daher auch $f^{-1}(x') < f^{-1}(y')$. Nach Voraussetzung existiert nun ein $z \in X$ mit $f^{-1}(x') < z < f^{-1}(y')$. Nach der Bedingung an f folgt daraus $x' = f(f^{-1}(x')) <' f(z) <' f(f^{-1}(y')) = y'$. Somit erfüllt $z' := f(z)$ die Ungleichungen $x' <' z' <' y'$, und $(X', \leqslant')$ ist dicht.

(c) Von diesen geordneten Menge ist $\mathbb{Q}$ als einzige dicht, und $\mathbb{Z}^{\leqslant 0}$ hat als einzige ein grösstes Element, und $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ hat als einzige ein kleinstes Element. Nach (a) und (b) sind daher keine zwei dieser geordneten Mengen zueinander isomorph.

(d) Betrachte zum Beispiel $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ mit der Einschränkung der üblichen Ordnungsrelation $\leqslant$. In diesem Fall ist die Ordnung dicht und besitzt ein grösstes, sowie ein kleinstes Element. Wie in (c) folgt daraus, dass diese nicht isomorph zu den anderen genannten geordneten Mengen ist.

3. Betrachten Sie zwei beliebige Äquivalenzrelationen E_1 und E_2 auf einer Menge A. Beweisen Sie für jede der folgenden Aussagen, dass sie im Allgemeinen wahr ist, oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

   (a) Die Relation $E_1 \cup E_2$ ist eine Äquivalenzrelation auf A.

   (b) Die Relation $E_1 \cap E_2$ ist eine Äquivalenzrelation auf A.

   (c) Die Relation $E_1 \times E_2$ ist eine Äquivalenzrelation auf $A \times A$.

   Lösung:

   (a) Die Relation $E_1 \cup E_2$ ist zwar reflexiv und symmetrisch, aber im Allgemeinen nicht transitiv und dann keine Äquivalenzrelation. Für ein Gegenbeispiel betrachte die folgenden Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
E_1 &:= \big\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \;\big|\; a \equiv b \mod (5)\big\}, \\
E_2 &:= \big\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \;\big|\; a \equiv b \mod (2)\big\}.
\end{aligned}
$$

   Dann ist $(5, 0) \in E_1$ und $(0, 2) \in E_2$, aber $(5, 2) \notin E_1 \cup E_2$. Deshalb ist die Relation $E_1 \cup E_2$ nicht transitiv.

   (b) Dies ist wahr. Seien zum Beispiel (a, b) und (b, c) in $E_1 \cap E_2$. Dann liegen (a, b) und (b, c) in E_1, und nach der Transitivität von E_1 daher auch (a, c) in E_1. Analog liegen (a, b) und (b, c) in E_2, und nach der Transitivität von E_2 daher auch (a, c) in E_2. Zusammengenommen folgt damit $(a, c) \in E_1 \cap E_2$; somit ist $E_1 \cap E_2$ transitiv. Die Beweise der Reflexivität und der Symmetrie gehen analog.

(c) Nach Definition ist $E_1 \times E_2$ die folgende Teilmenge von $(A \times A) \times (A \times A)$

$$E_1 \times E_2 \ := \ \big\{((a,b),(c,d)) \bigm| (a,b) \in E_1,\ (c,d) \in E_2\big\}$$

und daher eine Relation auf $A \times A$. Diese ist im allgemeinen weder reflexiv, noch symmetrisch. Es genügt, ein Gegenbeispiel zu einer dieser Eigenschaften anzugeben.

Zum Beispiel ist $E_1 \times E_2$ genau dann reflexiv, wenn für alle $(a,b) \in A \times A$ gilt $((a,b),(a,b)) \in E_1 \times E_2$. Dies ist äquivalent zu $(a,b) \in E_1$ und $(a,b) \in E_2$, gilt also genau dann für alle $(a,b) \in A \times A$, wenn $E_1 = E_2 = A \times A$ ist. Auf jeder Menge A mit mehr als einem Element hat aber die Gleichheitsrelation nicht diese Eigenschaft.

Sodann ist $E_1 \times E_2$ genau dann symmetrisch, für alle $((a,b),(c,d)) \in E_1 \times E_2$ auch $((c,d),(a,b)) \in E_1 \times E_2$ ist. Im Fall $E_1 = E_2$ folgt dies aus Vertauschung. Sei dagegen $E_1 \neq E_2$, und zum Beispiel $(a,b) \in E_1 \smallsetminus E_2$. Da E_2 eine Äquivalenzrelation ist, gilt dann $(a,a) \in E_2$. Somit ist $((a,b),(a,a)) \in E_1 \times E_2$, aber $((a,a),(a,b)) \notin E_1 \times E_2$, also ist $E_1 \times E_2$ nicht symmetrisch. Analog argumentiert man mit einem Element $(a,b) \in E_2 \smallsetminus E_1$. Da es auf jeder Menge A mit mehr als einem Element verschiedene Äquivalenzrelationen gibt, nämlich zum Beispiel die Gleichheitsrelation und die volle Relation $A \times A$, haben wir damit ein Gegenbeispiel.

Dagegen ist die Relation $E_1 \times E_2$ immer transitiv; die interessierten Leser mögen sich das selbst überlegen.

4. Betrachte eine ganze Zahl $n \geqslant 1$. Zeige, dass in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ das Kommutativitätsgesetz der Multiplikation und das Distributivitätsgesetz gilt.

   Lösung: Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$ und $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ in $\mathbb{Z}$. In $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt daher, nach Definition der Multiplikation und Addition darin:

$$[a] \cdot [b] = [a \cdot b] = [b \cdot a] = [b] \cdot [a] \qquad \text{und}$$

$$[a] \cdot ([b] + [c]) = [a] \cdot [b + c] = [a \cdot (b + c)] = [a \cdot b + a \cdot c] = [a \cdot b] + [a \cdot c)] = [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c].$$

5. Sei X eine Menge und R die Menge aller Abbildungen $X \to \mathbb{R}$. Für zwei Elemente $f,\ g \in R$ definieren wir $f + g$ und $f \cdot g \in R$ durch die Vorschrift $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ beziehungsweise $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ für alle $x \in X$. Zeige, dass R mit diesen beiden Operationen und einem geeigneten Null- bzw. Eins-Element einen kommutativen unitären Ring bildet. Für welche X ist dieser Ring ein Körper?

   Lösung: Die Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation sowie die Distributivität verifiziert man durch direkte Rechnung. Zum Beispiel für die Kommutativität der Addition: Für beliebige $f,\ g \in R$ gilt:

$$\forall x \in X\colon\ (f + g)(x) \ \stackrel{(1)}{=}\ f(x) + g(x) \ \stackrel{(2)}{=}\ g(x) + f(x) \ \stackrel{(3)}{=}\ (g + f)(x),$$

wobei bei (1) die Definition von $f+g$, bei (2) die Kommutativität der Addition in $\mathbb{R}$, und bei (3) die Definition von $g+f$ benutzt wurde. Insgesamt folgt daraus $f+g=g+f$, wie gewünscht.

Sodann sei $\underline{0} \in R$ die konstante Funktion $x \mapsto 0$. Für jedes $f \in R$ gilt dann

$$\forall x \in X\colon\ (\underline{0}+f)(x) \overset{(1)}{=} \underline{0}(x)+f(x) \overset{(2)}{=} 0+f(x) \overset{(3)}{=} f(x),$$

wobei bei (1) die Definition von $\underline{0}+f$, bei (2) die Definition von $\underline{0}$, und bei (3) die Eigenschaft des neutralen Elements der Addition in $\mathbb{R}$ benutzt wurde. Insgesamt folgt daraus $\underline{0}+f=f$, wie gewünscht.

Weiter definieren wir für jedes $f \in R$ die Funktion $-f \in R$ durch $x \mapsto -f(x)$ und zeigen analog $f+(-f)=0$, so dass $-f$ ein inverses Element der Addition ist. Auf die gleiche Weise zeigen wir, dass die durch $x \mapsto 1$ definierte konstante Funktion $\underline{1} \in R$ ein neutrales Element der Multiplikation ist. Die genannten Axiome bedeuten zusammen, dass $(R,+,\cdot,\underline{0},\underline{1})$ ein kommutativer unitärer Ring ist.

Das nächste Axiom $\underline{0} \neq \underline{1}$ bedeutet $\neg(\underline{0}=\underline{1})$, also $\neg\big(\forall x \in X\colon\ \underline{0}(x)=\underline{1}(x)\big)$ oder wiederum $\exists x \in X\colon\ \underline{0}(x) \neq \underline{1}(x)$. Nach der Definition der Funktionen $\underline{0}$ und $\underline{1}$ ist dies äquivalent zu $\exists x \in X\colon\ 0 \neq 1$. Falls X nicht-leer ist, können wir natürlich ein solches $x \in X$ finden; falls X leer ist, aber nicht! Darum gilt das Axiom $\underline{0} \neq \underline{1}$ genau dann, wenn X nicht-leer ist.

Schliesslich besagt das Axiom über das inverse Element der Multiplikation hier

$$\forall f \in R \smallsetminus \{\underline{0}\}\ \exists f' \in R\colon\ f' \cdot f = \underline{1}.$$

Nach der Definition von $f' \cdot f$ und $\underline{1}$ bedeutet die Gleichung $f' \cdot f = \underline{1}$ dasselbe wie

$$\forall x \in X\colon\ f'(x) \cdot f(x) = 1.$$

Dies setzt natürlich voraus, dass für alle $x \in X$ der Wert $f(x) \neq 0$ ist. Wenn X aber mindestens zwei verschiedene Elemente x_1 und x_2 enthält, so ist die durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = x_1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $f \in R$ zwar ungleich $\underline{0}$, kann aber wegen $f(x_2)=0$ kein multiplikatives Inverses besitzen.

Wenn dagegen X aus genau einem Element x_1 besteht, so gilt für jede Funktion $f \in R \smallsetminus \{\underline{0}\}$ dann $f(x_1) \neq 0$, und die durch $x_1 \mapsto f(x_1)^{-1}$ definierte Funktion ist ein multiplikatives Inverses von f.

Insgesamt zeigt dies, dass R genau dann ein Körper ist, wenn X aus genau einem Element besteht.

6. Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Seine Elemente sind $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$, wobei jeweils $\overline{n}$ die Restklasse von n modulo $5\mathbb{Z}$ bedeutet. Berechne ...

   (a) ... alle Lösungen (x, y) der Gleichung $x + y = \overline{0}$.

   (b) ... den Wert von $\frac{\overline{3}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}}$.

   (c) ... den Wert von $\overline{4}^{2021}$,

   Lösung:

   (a) Die Gleichung $x+y = \overline{0}$ ist äquivalent zu der Gleichung $y = \overline{0} - x = -x$. Für $x = \overline{a}$ mit $0 \leqslant a \leqslant 4$ gilt ausserdem $-x = \overline{-a} = \overline{5-a}$. Somit ist die Menge der Lösungen

$$\{(x, -x) \mid x \in \mathbb{F}_5\} \;=\; \{(\overline{0}, \overline{0}),\; (\overline{1}, \overline{4}),\; (\overline{2}, \overline{3}),\; (\overline{3}, \overline{2}),\; (\overline{4}, \overline{1})\}.$$

   (b) Aus den Rechnungen

$$\begin{aligned} \overline{4} \cdot \overline{4} &= \overline{16} = \overline{1}, \\ \overline{3} \cdot \overline{2} &= \overline{6} = \overline{1} \end{aligned}$$

   folgt $\frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{4}$ und $\frac{\overline{1}}{\overline{3}} = \overline{2}$. Somit bekommen wir:

$$\frac{\overline{3}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}} \;=\; \overline{3} \cdot \frac{\overline{1}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}} \;=\; \overline{3} \cdot \overline{4} + \overline{2} \;=\; \overline{12} + \overline{2} \;=\; \overline{14} \;=\; \overline{4}.$$

   (c) Wegen $2021 = 1 + 2 \cdot 1010$ und der Assoziativität der Multiplikation gilt $\overline{4}^{2021} = \overline{4} \cdot \left(\overline{4}^2\right)^{1010}$. Hierbei ist $\overline{4}^2 = \overline{16} = \overline{1}$ das Einselement in $\mathbb{F}_5$. Mit Induktion zeigt man, dass $\overline{1}^n = \overline{1}$ ist für jede natürliche Zahl n. Insbesondere folgt daraus

$$\overline{4}^{2021} \;=\; \overline{4} \cdot \left(\overline{4}^2\right)^{1010} \;=\; \overline{4} \cdot \overline{1} \;=\; \overline{4}.$$

*7. Sei k ein endlicher Körper und S die Summe aller Elemente von k. Zeige, dass $S = 0$ ist genau dann, wenn k mehr als 2 Elemente besitzt.

   (*Hinweis:* Beweisen Sie zunächst, dass für alle $b \in k^\times$ die Gleichung $bS = S$ gilt.)

   Lösung: Für jedes $b \in k^\times$ ist die Abbildung $k \to k$, $a \mapsto ba$ bijektiv, weil b invertierbar ist. Mit dem Distributivgesetz folgt daher

$$S \;=\; \sum_{a \in k} a \;=\; \sum_{a \in k} ba \;=\; b \cdot \sum_{a \in k} a \;=\; bS.$$

   Besitzt k nun mehr als 2 Elemente, so existiert ein Element $b \in k \smallsetminus \{0, 1\}$. Für dieses gilt dann $(1-b)S = S - bS = 0$, und da $1 - b \neq 0$ invertierbar ist, folgt daraus $S = 0$.

   Andernfalls besitzt k genau die zwei verschiedenen Elemente 0 und 1 mit der Summe $S = 0 + 1 = 1 \neq 0$.