Musterlösung Serie 3

Körper und Vollständige Induktion

1. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

mit der Addition und Multiplikation von reellen Zahlen sowie den Konstanten 0 und 1 ein Körper ist.

Lösung: Betrachte zwei beliebige Elemente $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ und $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ aus $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{2} \\ x_1 \cdot x_2 &= (a_1 + b_1\sqrt{2})(a_2 + b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Da beide wieder in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ liegen, zeigt dies, dass die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wohldefinierte Abbildungen $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ induzieren. Auch die Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ liegen beide in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Alle Körperaxiome für $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, welche keinen Existenzquantor ($\exists$) enthalten, also alle mit Ausnahme der Existenz von additiven und multiplikativen Inversen, folgen nun direkt aus denen für $\mathbb{R}$.

Es bleibt zu zeigen, dass für beliebiges $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ das additive und im Fall $x \neq 0$ auch das multiplikative Inverse in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ existiert. Für das additive Inverse folgt dies aus der Gleichung $x + (-x) = 0$ in $\mathbb{R}$ und der Rechnung

$$-x = -(a + b\sqrt{2}) = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

Für das multiplikative Inverse beachten wir zuerst, dass $x = a + b\sqrt{2} \neq 0$ direkt $(a, b) \neq (0, 0)$ impliziert. Wir behaupten, dass dann auch $x' := a - b\sqrt{2} \neq 0$ ist. Im Fall $b = 0$ folgt dies direkt aus $x' = x \neq 0$. Im Fall $b \neq 0$ würde aus $x' = 0$ durch Auflösen der Gleichung $\sqrt{2} = a/b$ folgen, was aber der Irrationalität von $\sqrt{2}$ widerspricht. Die Wahl von x' ist motiviert von der zweiten binomischen Formel $xx' = (a + b\sqrt{2}) \cdot (a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Da $x, x' \neq 0$ sind, folgt daraus

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{x'}{xx'} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2}\right) + \left(\frac{-b}{a^2 - 2b^2}\right)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

Wegen $x \cdot x^{-1} = 1$ ist dies ein multiplikatives Inverses von x in $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Insgesamt haben wir damit alles gezeigt.

2. Seien a und b von Null verschiedene Elemente eines Körpers K. Zeige

   (a) Das inverse Element der Multiplikation a^{-1} ist eindeutig bestimmt.

   (b) Es gilt $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

   (c) Es gilt $(a/b)^{-1} = b/a$.

Lösung:

(a) Seien $x, y \in K$ mit $ax = 1$ und $ay = 1$. Mit dem Assoziativ- und Kommutativgesetz sowie dem neutralen Element der Multiplikation folgt dann

$$x \;=\; 1 \cdot x \;=\; (ay) \cdot x \;=\; (ya) \cdot x \;=\; y \cdot (ax) \;=\; y \cdot 1 \;=\; y.$$

(b) Wir rechnen

$$a^{-1}b^{-1}(ab) \;=\; a^{-1}b^{-1}ab \;=\; a^{-1}ab^{-1}b \;=\; (a^{-1}a)(b^{-1}b) \;=\; (1)(1) \;=\; 1,$$

wobei wir in der ersten und dritten Gleichung das Assoziativgesetz und in der zweiten Gleichung das Kommutativgesetz verwendet haben. Damit ist $a^{-1}b^{-1}$ ein inverses Element zu ab. Aus Punkt (a) dieser Übung folgt daher $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

(c) Nach Definition gilt $a/b := a \cdot b^{-1}$ und $b/a := b \cdot a^{-1}$. Wir rechnen

$$(b/a)(a/b) = (ba^{-1})(ab^{-1}) = b(a^{-1}a)b^{-1} = (bb^{-1})(a^{-1}a) = (b^{-1}b)(a^{-1}a) = 1 \cdot 1 = 1,$$

wobei wir in der zweiten und vierten Gleichung das Assoziativgesetz und in der dritten Gleichung das Kommutativgesetz verwendet haben. Damit ist $a^{-1}b^{-1}$ ein inverses Element zu ab. Aus Teil (a) dieser Übung folgt daher $(a/b)^{-1} = b/a$.

3. Sei $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ eine nicht-negative ganze Zahl. Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in eine pünktchenfreie Schreibweise. Achten Sie darauf, dass die Aussage auch für $n = 0$ einen Sinn ergibt.

(a)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

(b) Für alle $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ gilt

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) \;=\; a_0 - a_n.$$

(c) Gegeben sind Elemente $a_{ij} \in K$ für $i, j = 1, \ldots, n$, sodass gilt

$$(a_{11} + \ldots + a_{1n}) + (a_{21} + \ldots + a_{2n}) + \ldots + (a_{n1} + \ldots + a_{nn}) \;=\; 0\,.$$

(d) Es existieren Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in $\mathbb{R}$, sodass für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt:

$$\frac{a_1^1}{1!} + \frac{a_2^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n^n}{n!} \;=\; n\,.$$

(e) Für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ definieren wir

$$a_n := \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1}}}},$$

mit insgesamt $n+1$ Bruchstrichen.

Lösung: Die folgenden Aussagen ergeben auch einen Sinn für $n = 0$, weil die leere Summe als 0 definiert ist. Sie sind dann übrigens auch richtig.

(a)

$$\sum_{i=1}^{n} i \;=\; \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Für alle $(a_i)_{i=0}^{n} \in K^{n+1}$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) \;=\; a_0 - a_n.$$

(c) Gegeben sind Elemente $a_{ij} \in K$ für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$, sodass gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big) = 0.$$

(d) Es existieren Elemente a_k für alle $k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 1}$, sodass für alle $n \geqslant 1$ gilt:

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{a_m^m}{m!} \;=\; n.$$

(e) Für alle $n \geqslant 0$ definieren wir a_n durch Induktion durch

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{1}, \\ a_n &:= \frac{1}{1 + a_{n-1}} \qquad \text{für alle } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

4. Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in K$ and alle $m, n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt:

(a) $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$

(b) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.

Lösung:

(a) Wir verwenden Induktion über m.
Induktionsverankerung $m = 0$: Für alle $x, y \in K$ gilt $x^0 = y^0 = 1$ und somit

$$(x \cdot y)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = x^0 \cdot y^0.$$

Also gilt die Aussage für $m = 0$.
Induktionsschritt: Sei die Aussage wahr für ein gegebenes $m \geqslant 0$. Dann gilt für alle $x, y \in K$

$$(x \cdot y)^{m+1} = (x \cdot y)^m \cdot (x \cdot y) \stackrel{\text{IV}}{=} x^m \cdot y^m \cdot x \cdot y = (x^m \cdot x) \cdot (y^m \cdot y) = x^{m+1} \cdot y^{m+1}.$$

Dabei wurde bei der ersten Gleichung die induktive Definition von $(x \cdot y)^{m+1}$, bei der zweiten die Induktionsvoraussetzung, bei der dritten die Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation in K, und bei der letzten die induktive Definition von x^{m+1} und y^{m+1} benutzt. Das zeigt die Aussage auch für $m + 1$, die somit nach Induktion für alle $m \geqslant 0$ gilt.

(b) Zunächst beweisen wir die folgende Aussage:

Behauptung: Für alle $x \in K$ und für alle $m, n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Beweis: Wir benutzen Induktion über n.
Induktionsverankerung $n = 0$: Es gilt $x^m \cdot x^0 = x^m \cdot 1 = x^m$.
Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage gilt für ein gegebenes $n \geqslant 0$. Dann gilt

$$x^m \cdot x^{n+1} = x^m \cdot (x^n \cdot x) = (x^m \cdot x^n) \cdot x \stackrel{\text{IV}}{=} x^{m+n} \cdot x = x^{m+(n+1)},$$

wobei wir bei der ersten Gleichung die induktive Definition von x^{n+1}, bei der zweiten die Assoziativität der Multiplikation in K, bei der dritten die Induktionsvoraussetzung, und bei der letzten die induktive Definition von x^{m+n+1} benutzt haben. Also gilt die Aussage für $n+1$, und zusammen beweist dies die Behauptung durch Induktion. $\square$

Wir beweisen nun die Hauptaussage $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ durch Induktion über n.
Induktionsverankerung $n = 0$: Für alle $x \in K$ gilt $(x^m)^0 = 1 = x^0 = x^{m \cdot 0}$.
Induktionsschritt: Angenommen die Behauptung gilt für ein gegebenes $n \geqslant 0$. Dann gilt

$$(x^m)^{n+1} = (x^m)^n \cdot x^m \stackrel{\text{IV}}{=} x^{m \cdot n} \cdot x^m = x^{m \cdot n + m} = x^{m(n+1)},$$

wobei wir bei der ersten Gleichung die induktive Definition von $(x^m)^{n+1}$, bei der zweiten die Induktionsvoraussetzung, und bei der dritten die vorherige Behauptung benutzt haben. Also gilt die Aussage für $n + 1$, und zusammen beweist dies die Behauptung durch Induktion.

5. Die folgende Behauptung ist falsch. Was stimmt nicht mit dem „Beweis“?

   Behauptung. Seien $n, m, k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ und $\max\{n, m\} = k$; dann gilt $n = m = k$.

   „Beweis“. Wir führen Induktion nach k.
   Induktionsverankerung $k = 0$: Aus $\max\{n, m\} = 0$ folgt $n = m = 0 = k$.
   Induktionsschritt: Aus $\max\{n, m\} = k$ folgt $\max\{n - 1, m - 1\} = k - 1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $n - 1 = m - 1 = k - 1$ und damit auch $n = m = k$. $\square$

   Lösung: Die Behauptung ist falsch, wie das Beispiel $(n, m, k) = (0, 1, 1)$ zeigt. An der gleichen Stelle geht auch der „Beweis“ schief: Um die Induktionsvoraussetzung für $k-1$ zu benutzen, brauchen wir, dass $n-1$ und $m-1$ die Voraussetzungen der Behauptung erfüllen, also in $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ liegen. Dies ist in diesem Beispiel nicht erfüllt, da $n - 1 < 0$ ist.

6. Betrachte eine beliebige ganze Zahl $n \geqslant 0$ sowie beliebige Elemente $a, a_i, b_i \in K$ für $0 \leqslant i \leqslant n$. Beweisen Sie durch Induktion die folgenden Aussagen.

   (a)
   $$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\,.$$

   (b)
   $$a \cdot \sum_{i=0}^{n} b_i \;=\; \sum_{i=0}^{n} ab_i\,.$$

   Lösung:

   (a) *Induktionsverankerung* $n = 0$: Da die leere Summe durch das neutrale Element 0 der Addition definiert ist, haben wir
   $$\sum_{i=1}^{0} a_i + \sum_{i=1}^{0} b_i \;=\; 0 + 0 \;=\; 0 \;=\; \sum_{i=1}^{0}(a_i + b_i).$$

   Induktionsschritt: Angenommen die Aussage ist wahr für ein gegebenes $n \geqslant 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n+1} b_i\Big) &= \bigg(\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) + a_{n+1}\bigg) + \bigg(\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big) + b_{n+1}\bigg) \\
&= \bigg(\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)\bigg) + a_{n+1} + b_{n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\Big) + (a_{n+1} + b_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} (a_i + b_i),
\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten und letzten Gleichung die induktive Definition der Summe, in der zweiten Gleichung das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz, und in der dritten Gleichung die Induktionsvoraussetzung (IV) verwendet haben. Das zeigt die Aussage für $n + 1$.

Durch Induktion folgt damit die Gesamtaussage.

(b) *Induktionsverankerung*: Für $n = 0$ gilt

$$a \sum_{i=0}^{0} b_i = a \cdot b_0 = \sum_{i=0}^{0} (a \cdot b_0).$$

Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage ist wahr für ein gegebenes $n \geqslant 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
a \cdot \sum_{i=0}^{n+1} b_i &= a \cdot \bigg(\Big(\sum_{i=0}^{n} b_i\Big) + b_{n+1}\bigg) \\
&= a\Big(\sum_{i=0}^{n} b_i\Big) + ab_{n+1} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \Big(\sum_{i=0}^{n} (a \cdot b_i)\Big) + ab_{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (a \cdot b_i),
\end{aligned}$$

wobei wir in der ersten und letzten Gleichung die Definition der Summe, in der zweiten Gleichung das Distributivgesetz und in der dritten Gleichung die Induktionsvoraussetzung verwendet haben.

Das zeigt die Aussage für $n + 1$.

*7. Die *Fibonacci-Zahlen* F_n sind für alle ganzen Zahlen $n \geqslant 0$ definiert durch

$$F_n \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0, \\ 1 & \text{für } n = 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für alle } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Zeige mit $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ die geschlossene Formel

$$F_n \;=\; \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} \;=\; \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

Lösung: Für $n = 0, 1$ berechnen wir direkt

$$\begin{aligned} \varphi^0 - \psi^0 \;&=\; 1 - 1 \;=\; 0, \\ \varphi^1 - \psi^1 \;&=\; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \;=\; \sqrt{5}, \end{aligned}$$

wobei wir benutzen, dass für jedes Element x eines unitären Rings $x^0 = 1$ gilt. Wegen $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ gilt die Aussage also für $n \leqslant 1$.

Nehmen wir nun an, dass $n \geqslant 2$ ist und die gewünschte Gleichung für alle kleineren Indizes gilt. Dann berechnen wir zuerst

$$\begin{aligned} \varphi^2 \;&=\; \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \;=\; \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \;=\; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \;=\; \varphi + 1 \qquad \text{und} \\ \psi^2 \;&=\; \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \;=\; \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \;=\; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \;=\; \psi + 1. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} F_n \;=\; F_{n-1} + F_{n-2} \;&\overset{\text{IV}}{=}\; \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\varphi - \psi} \\ &=\; \frac{\varphi^{n-2}(\varphi + 1) - \psi^{n-2}(\psi + 1)}{\varphi - \psi} \\ &=\; \frac{\varphi^{n-2}\varphi^2 - \psi^{n-2}\psi^2}{\varphi - \psi} \;=\; \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}. \end{aligned}$$

Mit Induktion nach n folgt die Aussage daher für alle $n \geqslant 0$.