Musterlösung Serie 4

Summen, Produkte und Matrizen

1. Beweisen Sie:

(a) Für jede ganze Zahl $n \geqslant 0$ gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

(b) Für alle ganzen Zahlen $n, m \geqslant 0$ gilt $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$.

*(c) Für alle ganzen Zahlen $n, m, r \geqslant 0$ mit $r \leqslant m+n$ gilt $\sum \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$, wobei sich die Summe über alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leqslant k \leqslant m$ und $0 \leqslant r-k \leqslant n$ erstreckt.

Lösung:

(a) Dies folgt aus dem Binomischen Lehrsatz $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k}$.

(b) Wir benutzen Induktion nach m.
Induktionsverankerung $m = 0$: Hier ist

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n+k}{k} \;=\; \binom{n}{0} \;=\; 1 \;=\; \binom{n+0+1}{0}.$$

Induktionsschritt: Ist $m > 0$ und die Aussage gilt für $m-1$, so folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k}{k} + \binom{n+m}{m} \\ &\overset{\text{IV}}{=} \binom{n+m}{m-1} + \binom{n+m}{m} \\ &= \binom{n+m+1}{m},\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung in der Vorlesung gezeigt wurde.

(c) Um lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, setzen wir $\binom{n}{k} := 0$ für $k < 0$ oder $k > n$. Dann ist die linke Seite der Gleichung $\sum' \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$ eine formal unendliche Summe über alle $k \in \mathbb{Z}$, bei der aber alle bis auf endlich viele Terme verschwinden. Ausserdem gilt die Aussage

$$(*) \qquad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},$$

die in der Vorlesung für alle $n > k > 0$ bewiesen wurde, dann schon für alle $n > 0$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Wir beweisen die gesuchte Gleichung durch Induktion über n. Für $n = 0$ ist

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}' \binom{m}{k} \cdot \binom{0}{r-k} = \binom{m}{r} = \binom{m+0}{r}.$$

Für $n > 0$ nehmen wir als Induktionsvoraussetzung (IV) an, die Aussage gelte für $n-1$. Für n gilt sie dann auch im Fall $r = 0$ wegen

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}' \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{0-k} = \binom{m}{0} \cdot \binom{n}{0} = 1 = \binom{m+n}{0}.$$

Im Fall $r > 0$ rechnen wir

$$\begin{aligned}
\binom{m+n}{r} &\overset{(*)}{=} \binom{m+n-1}{r-1} + \binom{m+n-1}{r} \\
&\overset{\text{(IV)}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}}' \binom{m}{k} \cdot \binom{n-1}{r-1-k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}}' \binom{m}{k} \cdot \binom{n-1}{r-k} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}' \binom{m}{k} \cdot \left(\binom{n-1}{r-1-k} + \binom{n-1}{r-k}\right) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}}' \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k}.
\end{aligned}$$

2. Sei $m > 0$ eine ganze Zahl. Vereinfachen Sie das folgende Teleskopprodukt:

$$\prod_{n=2}^{m} (1 - \tfrac{1}{n^2}).$$

Lösung: Mit der Gleichung $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$ und den Rechenregeln für Produkte rechnen wir

$$\begin{aligned}
\prod_{n=2}^{m} (1 - \tfrac{1}{n^2}) &= \prod_{n=2}^{m} \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} \\
&= \frac{\prod_{n=2}^{m}(n+1)}{\prod_{n=2}^{m} n} \cdot \frac{\prod_{n=2}^{m}(n-1)}{\prod_{n=2}^{m} n} \\
&= \frac{\prod_{j=3}^{m+1} j}{\prod_{j=2}^{m} j} \cdot \frac{\prod_{\ell=1}^{m-1} \ell}{\prod_{\ell=2}^{m} \ell} \\
&= \frac{m+1}{2} \cdot \frac{1}{m} \\
&= \frac{m+1}{2m},
\end{aligned}$$

wobei in der dritten Zeile im Zähler die Substitutionen $j := n + 1$ und $\ell := n - 1$ und im Nenner die Substitutionen $j := n$ und $\ell := n$ verwendet wurden. Man beachte, dass die gesamte Rechnung auch im Fall $m = 1$ richtig ist.

3. Beweisen Sie mittels Induktion:

   (a) Im Körper der rationalen Zahlen gilt für alle $n \geqslant 1$
   $$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{n^n}{n!}\,.$$

   (b) Für alle $n \geqslant 2$ und für beliebige Elemente $x \neq y$ eines Körpers gilt
   $$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\,.$$

   Lösung:

   (a) Wir verwenden Induktion über n. Wegen
   $$\prod_{i=1}^{0}(1 + \frac{1}{i}) = 1 = \frac{1^1}{1!},$$
   gilt die Aussage im Fall $n = 1$. Nehme nun an, sie gilt für ein gegebenes n. Wegen
   $$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i &= \left[\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i\right] \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{n^n}{n!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \frac{1}{n!}\left(n \cdot (1 + \frac{1}{n})\right)^n \\ &= \frac{1}{n!}(n + 1)^n \cdot \frac{n + 1}{n + 1} \\ &= \frac{(n + 1)^{n+1}}{(n + 1)!}\end{aligned}$$
   gilt sie dann auch für $n + 1$. Das zeigt die Behauptung.

   (b) Die Aussage der Aufgabe ist äquivalent zu der Aussage, dass für alle $n \geqslant 2$ und für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ gilt:
   $$x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i.$$

Wir verwenden Induktion über n. Der Fall $n=2$ besagt

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),$$

was durch Ausmultiplizieren folgt. Nehme nun an, die Aussage der Aufgabe gilt für ein gegebenes $n \geqslant 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(x-y)\cdot\sum_{i=0}^{n} x^{n-i}y^i &= (x-y)\cdot\left(\left(x\cdot\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i\right)+y^n\right)\\
&= x\cdot\left((x-y)\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i\right)+xy^n - y^{n+1}\\
&\overset{\text{IV}}{=} x(x^n-y^n)+xy^n-y^{n+1}\\
&= x^{n+1}-y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass die Aussage auch für $n+1$ gilt.

4. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Variablen x_1, x_2, x_3 in $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 2\\
5x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & = & 5\\
x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 1
\end{array}$$

Lösung: Wir subtrahieren das 2-fache der dritten Zeile von der ersten Zeile und erhalten

$$\begin{array}{rcrcrcl}
 & & x_2 & + & 5x_3 & = & 0\\
5x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & = & 5\\
x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 1
\end{array}$$

Wir subtrahieren das 5-fache der dritten Zeile von der zweiten Zeile und erhalten

$$\begin{array}{rcrcrcl}
 & & x_2 & + & 5x_3 & = & 0\\
 & - & 8x_2 & + & 8x_3 & = & 0\\
x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 1
\end{array}$$

Wir addieren das 8-fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile und erhalten

$$\begin{array}{rcrcrcl}
 & & x_2 & + & 5x_3 & = & 0\\
 & & & & 48x_3 & = & 0\\
x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 1
\end{array}$$

Jetzt können wir das System lösen: aus der zweiten Zeile folgt $x_3 = 0$ und damit folgt aus der ersten Zeile $x_2 = 0$. Mithilfe der letzten Zeile sehen wir dann, dass $x_1 = 1$ sein muss. Ausserdem sind für diese Werte alle Gleichungen erfüllt. Wir haben daher die einzige Lösung $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$.

5. Beweisen Sie die Linksdistributivität der Matrixmultiplikation, das heisst: Zeigen Sie, dass für alle Matrizen A, B, C geeigneter Grösse über einem Körper K gilt

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Lösung: Damit die Formel einen Sinn ergibt, müssen B und C die gleiche Grösse haben und die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B und C sein. Seien also n, m, ℓ natürliche Zahlen, so dass A eine $(n \times m)$-Matrix und B und C beides $(m \times \ell)$-Matrizen sind. Bezeichne mit X_{ij} den Eintrag einer Matrix X an der Stelle (i, j). Dann gilt nach Definition der Matrixaddition und -multiplikation:

$$\begin{aligned}
(A \cdot (B + C))_{ik} &= \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(B + C)_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^{m} A_{ij}(B_{jk} + C_{jk}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} A_{ij}B_{jk} + \sum_{j=1}^{m} A_{ij}C_{jk} \\
&= (A \cdot B)_{ik} + (A \cdot C)_{ik} \\
&= (A \cdot B + A \cdot C)_{ik}.
\end{aligned}$$

Da die Matrizen $A \cdot (B + C)$ und $A \cdot B + A \cdot C$ eintragsweise übereinstimmen, sind sie gleich.

6. Berechnen Sie das folgende Produkt von Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 1 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 1 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j & 1 \end{pmatrix}$$

Wie sieht das Produkt in der umgekehrten Reihenfolge aus?

Lösung: Das gegebene Produkt ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & e & 1 & 0 & 0 \\ c & f & h & 1 & 0 \\ d & g & i & j & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt in der umgekehrten Reihenfolge ist dagegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b+ea & e & 1 & 0 & 0 \\ c+hb+a(eh+f) & f+eh & h & 1 & 0 \\ d+jc+b(hj+i)+a(g+fj+e(hj+i)) & g+fj+e(hj+i) & i+hj & j & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Falls $a \neq c$ ist, so gilt für jedes $m \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a^m & b\,\frac{a^m-c^m}{a-c} \\ 0 & c^m \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie eine ähnliche Formel für den Fall $a = c$ her.

Lösung:

$a \neq c$: Wir benutzen vollständige Induktion über m. Im Basisfall $m = 0$ gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 & b\frac{a^0-c^0}{a-c} \\ 0 & c^0 \end{pmatrix}.$$

Angenommen, die Behauptung gilt für ein $m \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{m+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^m \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} a^m & b\frac{a^m-c^m}{a-c} \\ 0 & c^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{m+1} & a^m b + b\frac{a^m-c^m}{a-c}c \\ 0 & c^{m+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen

$$a^m b + b\frac{a^m - c^m}{a-c}c = \frac{a^{m+1}b - a^m bc + ba^m c - bc^{m+1}}{a-c} = b\frac{a^{m+1} - c^{m+1}}{a-c}$$

folgt die Aussage damit auch im Fall $m+1$.

$a = c$: In diesem Fall sind die ersten paar Potenzen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}.$$

Wir vermuten daher die allgemeine Formel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} a^m & ma^{m-1}b \\ 0 & a^m \end{pmatrix},$$

wobei wir im Fall $m = 0$ den Ausdruck ma^{m-1} als 0 interpretieren. Diese Formel gilt also schon für $m = 0$, und wenn sie für ein $m \geqslant 0$ gilt, so folgt sie durch die Rechnung

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^{m+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^{m} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \overset{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} a^m & ma^{m-1}b \\ 0 & a^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^m a & a^m b + ma^{m-1}ba \\ 0 & a^m a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{m+1} & (m+1)a^m b \\ 0 & a^{m+1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

auch für $m + 1$. Nach Induktion gilt die Formel also für alle $m \geqslant 0$.