Musterlösung Serie 5

Matrizen

1. Eine quadratische Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn ihre Transponierte A^T invertierbar ist, und dann ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

   Lösung: Wir wissen bereits, dass für alle quadratischen Matrizen A und B der gleichen Grösse die Rechenregel $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ gilt.

   Nehmen wir zuerst an, dass A invertierbar ist mit der Inversen A^{-1}. Dann rechnen wir:
$$\begin{aligned} A^T \cdot (A^{-1})^T &= (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I, \\ (A^{-1})^T \cdot A^T &= (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I. \end{aligned}$$
   Daher ist A^T invertierbar mit der Inversen $(A^{-1})^T$, also gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

   Nehmen wir jetzt umgekehrt an, die Matrix A^T ist invertierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $(A^T)^T = A$ ist. Mit dem oben Bewiesenen für die Matrix A^T anstatt A folgt dann, dass $(A^T)^T = A$ invertierbar ist.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, für welche Werte des Parameters α die folgende Matrix über $\mathbb{Q}$ invertierbar ist:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2\alpha \\ -6 & 2 & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$
   Lösung: Das Gaußsche Eliminationsverfahren liefert die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha \end{pmatrix},$$
   und diese ist genau dann invertierbar, wenn die ursprüngliche Matrix invertierbar ist. Aber eine Dreiecksmatrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Diagonaleinträge ungleich null sind. Es folgt, dass die Matrix der Aufgabe genau dann invertierbar ist, wenn für α gilt:
$$\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) \neq 0.$$
   Dies ist äquivalent zu $\alpha \notin \{0, 1\}$.

3. Finden Sie eine 2×3-Matrix A und eine 3×2-Matrix B über $\mathbb{Q}$, so dass $A \cdot B$ eine Einheitsmatrix, aber $B \cdot A$ keine Einheitsmatrix ist.

   Lösung: Zum Beispiel $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A \cdot B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B \cdot A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\neq\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sei A eine der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $Ax = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

   Lösung: Wir geben die Lösungsmenge $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$ in den jeweiligen Fällen an.

   - $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$: $\quad L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$
   - $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\quad L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$
   - $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: $\quad L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

5. Seien A eine $m \times m$-Matrix und B eine $m \times n$-Matrix, und sei (A, B) die durch Zusammensetzen entstehende $m \times (m+n)$-Matrix. Sei C eine $m \times n$-Matrix, so dass (I_m, C) durch eine Folge elementarer Zeilenoperationen aus (A, B) entsteht. Zeigen Sie, dass dann A invertierbar und C die eindeutige Lösung der Gleichung $AC = B$ ist, das heisst

$$C \;=\; A^{-1}B.$$

   Lösung: Eine Folge elementarer Zeilenoperationen entspricht der Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix. Sei also T eine invertierbare Matrix mit $(I_m, C) = T \cdot (A, B)$. Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein Produkt von Blockmatrizen, daher ist $(I_m, C) = (TA, TB)$. Wir vergleichen die Einträge und erhalten die zwei Gleichungen $I_m = TA$ und $C = TB$. Als quadratische linksinvertierbare Matrix ist A daher invertierbar mit der Inversen $A^{-1} = T$. Daraus folgt dann die gewünschte Gleichung $C = TB = A^{-1}B$.

6. Wir fixieren $n > \ell > 0$ und schreiben alle $n \times n$-Matrizen in Blockform

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

wobei A_{11} eine $\ell \times \ell$-Matrix und A_{12}, A_{21}, A_{22} jeweils eine Matrix in passender Grösse ist (nämlich welcher?).

(a) Zeige, dass für beliebige solche Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

(b) Sei A eine $n \times n$-Matrix *in oberer Blockdreiecksform* bezüglich ℓ, das heisst, mit A_{21} gleich der Nullmatrix. Zeige, dass A invertierbar ist genau dann, wenn A_{11} und A_{22} invertierbar sind, und dann ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie als Anwendung die inversen Matrizen von

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Matrizen A_{12}, A_{21}, A_{22} haben jeweils die Grössen $\ell \times (n-\ell)$, $(n-\ell) \times \ell$ und $(n-\ell) \times (n-\ell)$.

(a) Der Koeffizient von $A \cdot B$ an der Stelle (i,j) ist gegeben durch

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \Big(\sum_{k=1}^{\ell} a_{ik}b_{kj}\Big) + \Big(\sum_{k=\ell+1}^{n} a_{ik}b_{kj}\Big).$$

Für $1 \leqslant k \leqslant \ell$ gilt

$$a_{ik}b_{kj} = \begin{cases} (A_{11})_{ik}(B_{11})_{kj} & \text{falls } 1 \leqslant i,j \leqslant \ell \\ (A_{11})_{ik}(B_{12})_{k,j-\ell} & \text{falls } 1 \leqslant i \leqslant \ell \text{ und } \ell+1 \leqslant j \leqslant n \\ (A_{21})_{i-\ell,k}(B_{11})_{kj} & \text{falls } \ell+1 \leqslant i \leqslant n \text{ und } 1 \leqslant j \leqslant \ell \\ (A_{21})_{i-\ell,k}(B_{12})_{k,j-\ell} & \text{falls } \ell+1 \leqslant i,j \leqslant n\,. \end{cases}$$

Für $\ell + 1 \leqslant k \leqslant n$ gilt

$$a_{ik}b_{kj} = \begin{cases} (A_{12})_{i,k-\ell}(B_{21})_{k-\ell,j} & \text{falls } 1 \leqslant i,j \leqslant \ell \\ (A_{12})_{i,k-\ell}(B_{22})_{k-\ell,j-\ell} & \text{falls } 1 \leqslant i \leqslant \ell \text{ und } \ell+1 \leqslant j \leqslant n \\ (A_{22})_{i-\ell,k-\ell}(B_{21})_{k-\ell,j} & \text{falls } \ell+1 \leqslant i \leqslant n \text{ und } 1 \leqslant j \leqslant \ell \\ (A_{22})_{i-\ell,k-\ell}(B_{22})_{k-\ell,j-\ell} & \text{falls } \ell+1 \leqslant i,j \leqslant n\,. \end{cases}$$

Im Fall $1 \leqslant i,j \leqslant \ell$ erhalten wir deshalb

$$\begin{aligned} (A \cdot B)_{ij} &= \sum_{k=1}^{\ell}(A_{11})_{ik}(B_{11})_{kj} \;+\; \sum_{k=\ell+1}^{n}(A_{12})_{i,k-\ell}(B_{21})_{k-\ell,j} \\ &= (A_{11}B_{11})_{ij} + \sum_{k=1}^{n-\ell}(A_{12})_{ik}(B_{21})_{kj} \\ &= (A_{11}B_{11})_{ij} + (A_{12}B_{21})_{ij}\,. \end{aligned}$$

Das zeigt die Aussage für den ersten Matrixblock.
In den anderen Fällen erhält man mit demselben Argument

$$(A{\cdot}B)_{ij} = \begin{cases} (A_{11}B_{12})_{i,j-\ell} + (A_{12}B_{22})_{i,j-\ell} & \text{falls } 1 \leqslant i \leqslant \ell \text{ und } \ell+1 \leqslant j \leqslant n \\ (A_{21}B_{11})_{i-\ell,j} + (A_{22}B_{21})_{i-\ell,j} & \text{falls } \ell+1 \leqslant i \leqslant n \text{ und } 1 \leqslant j \leqslant \ell \\ (A_{21}B_{12})_{i-\ell,j-\ell} + (A_{22}B_{22})_{i-\ell,j-\ell} & \text{falls } \ell+1 \leqslant i,j \leqslant n\,. \end{cases}$$

Das zeigt die Aussage für die restlichen Blöcke.

(b) Nehmen wir zuerst an, dass A_{11} und A_{22} invertierbar sind. Für die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

folgt dann aus Aufgabenteil a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^{-1} & A_{11}(-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}) + A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ 0 & I_{n-\ell} \end{pmatrix} = I_n.$$

Da jede rechtsinvertierbare Matrix schon insgesamt invertierbar ist, ist also A invertierbar ist mit $B = A^{-1}$.

Nehmen wir umgekehrt an, dass A ist invertierbar mit der Inversen $B := A^{-1}$. Schreiben wir

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

wie in Aufgabenteil a), so folgt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_\ell & 0 \\ 0 & I_{n-\ell} \end{pmatrix}.$$

Wegen $A_{22}B_{22} = I_{n-\ell}$ ist A_{22} invertierbar. Aus $A_{22}B_{21} = 0$ folgt deshalb $B_{21} = 0$. Da $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_\ell$ und $B_{21} = 0$ ist, gilt $A_{11}B_{11} = I_\ell$, also ist auch A_{11} invertierbar.

In den Anwendungen erhalten wir

$$D_1^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad D_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*7. Beweisen Sie den

Satz. *(Bruhat-Zerlegung)* Für jede invertierbare Matrix A existieren eine Permutationsmatrix P und invertierbare obere Dreiecksmatrizen B und B', so dass gilt

$$A = BPB'.$$

Hinweis: Wähle eine invertierbare obere Dreiecksmatrix U, so dass die Summe der Anzahlen der führenden Nullen in allen Zeilen der Matrix UA maximal ist. Sodann finde eine Permutationsmatrix Q, so dass QUA eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist.

Lösung: Für alle invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen U betrachten wir die Summe der Anzahlen der führenden Nullen aller Zeilen von UA. Diese Summe ist nach oben beschränkt. Daher können wir eine invertierbare obere Dreiecksmatrix U wählen, für welche diese Summe maximal ist. Dann behaupten wir:

Behauptung. Je zwei Zeilen der Matrix UA besitzen eine ungleiche Anzahl führender Nullen.

Beweis. Angenommen, dies wäre nicht der Fall für die i-te und j-te Zeile mit $i < j$. Dann haben die beiden Zeilen an der gleichen Stelle den ersten Wert, der nicht Null ist. Wir subtrahieren ein geeignetes Vielfaches der j-ten Zeile von der i-ten Zeile und erhalten in der i-ten Zeile mindestens eine führende Null mehr. Diese Zeilenoperation entspricht der Linksmultiplikation mit einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix der Form $T = I_m + \lambda E_{ij}$. Man beachte, dass sich die anderen Zeilen nicht verändert haben. Daher ist die Summe der Anzahlen der führenden Nullen aller Zeilen von TUA echt grösser als diejenige von UA. Weil TU auch eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist, ergibt dies einen Widerspruch zur Wahl von U. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wegen der Behauptung können wir die Matrix UA durch eine geeignete Umordnung der Zeilen in eine obere Dreiecksmatrix B' überführen. Diese Umordnung der Zeilen entspricht der Linksmultiplikation mit einer Permutationsmatrix Q, also ist $QUA = B'$. Weil Q, U und A alle invertierbar sind, ist auch B' invertierbar. Die Inverse einer Permutationsmatrix ist wieder eine Permutationsmatrix und die

Inverse einer invertierbaren oberen Dreiecksmatrix ist wieder eine invertierbare obere Dreiecksmatrix. Wir setzen $P := Q^{-1}$ und $B := U^{-1}$ und erhalten durch Linksmultiplikation mit P und B die Gleichung $A = BPB'$.