Musterlösung Serie 6

Inverse Matrizen, Vektorräume

1. Invertieren Sie die folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 & -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 4/5 & -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 & 4/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 & -1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 35/11 & -16/11 & 13/11 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 10/11 & -3/11 & 10/11 & -1 \\ -16/11 & 7/11 & -5/11 & 1 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{Q}^3$ der Gleichung $Ax = b_i$ für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

und jeden der folgenden Vektoren in $\mathbb{Q}^3$:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad b_4 := \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Vollständige Gauss-Elimination für die zusammengesetzte Matrix (A, I_3) führt zu der Matrix (I_3, A^{-1}) mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

insbesondere ist A invertierbar. Sodann berechne $x_i := A^{-1} b_i$ für jedes $1 \leqslant i \leqslant 5$, mit dem Ergebnis

$$x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1/2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dabei kann man den Schreibaufwand verringern, indem man auf einen Schlag das Matrixprodukt $A^{-1} \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ berechnet.

Variante: Wende vollständige Gauss-Elimination auf die zusammengesetzte Matrix $\tilde{A} := (A, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ an. Das Resultat ist die Matrix

$$\tilde{B} := (I_3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Die vorige Aufgabe impliziert dann $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = A^{-1}(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$.

*3. Sei X eine Menge und P die Menge aller Teilmengen von X. Für alle A, $B \in P$ und $\lambda \in \mathbb{F}_2$ definiere

$$\begin{aligned} A + B &:= (A \cup B) \setminus (A \cap B), \\ \lambda \cdot A &:= \begin{cases} \varnothing & \text{für } \lambda = 0, \\ A & \text{für } \lambda = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Zeige, dass $(P, +, \cdot, \varnothing)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

Lösung: 1. Lösungsweg: Wir weisen alle Axiome einzeln nach. Die Kommutativität der Addition sehen wir direkt, da $\cap$ und $\cup$ kommutativ sind. Für die Assoziativität der Addition haben wir:

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= (((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup C) \setminus (((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C), \\ A+(B+C) &= (A \cup ((B \cup C) \setminus (B \cap C))) \setminus (A \cap ((B \cup C) \setminus (B \cap C))). \end{aligned}$$

Dann rechnen wir aus:

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= (((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup C) \setminus (((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cap C) \\ &= ((A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \setminus C)) \setminus (((A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B)) \\ &= ((A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \setminus C)) \setminus (((A \cap C) \setminus B) \cup ((B \cap C) \setminus A)) \\ &= (A \cup B \cup C) \setminus (((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B) \cup ((A \cap B) \setminus C)). \end{aligned}$$

Genauso kommen wir auch ausgehend von $A+(B+C)$ zum gleichen Ergebnis, was wir uns gewünscht haben. Sodann ist wegen $A+\varnothing = (A\cup\varnothing)\smallsetminus(A\cap\varnothing) = A\smallsetminus\varnothing = A$ die Menge $\varnothing$ ein neutrales Element der Addition. Genauso zeigt die Rechnung $A + A = (A \cup A) \smallsetminus (A \cap A) = A \smallsetminus A = \varnothing$ die Existenz eines inversen Elements der Addition. Zusammen zeigt dies, dass $(P, +, \varnothing)$ eine abelsche Gruppe ist.

Das Axiom $1 \cdot A = A$ gilt nach Konstruktion. Die Links- und Rechtsdistributivität sowie die Assoziativität der skalaren Multiplikation zeigt man durch ein paar kleine Fallunterscheidungen, die wir hier weglassen. Am interessantesten ist der Fall

$$(1 + 1) \cdot A \;\overset{!}{=}\; 0 \cdot A \;=\; \varnothing \;\overset{\text{s.o.}}{=}\; A + A \;=\; 1 \cdot A + 1 \cdot A.$$

Somit sind alle Axiome verifiziert.

2. Lösungsweg: Zu jeder Teilmenge $A \subset X$ assoziieren wir ihre charakteristische Funktion

$$\chi_A\colon X \to \mathbb{F}_2,\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Umgekehrt assoziieren wir zu jeder Funktion $\chi\colon X \to \mathbb{F}_2$ die Teilmenge

$$A_\chi \;:=\; \big\{x \in X \;\big|\; \chi(x) = 1\big\}.$$

Dies induziert zueinander inverse Bijektionen zwischen den Mengen P und $\mathbb{F}_2^X$. Wir behaupten für alle $A, B \subset X$ und $\lambda \in \mathbb{F}_2$:

$$\begin{aligned} \chi_\varnothing &= 0, \\ \chi_{A+B} &= \chi_A + \chi_B, \\ \chi_{\lambda\cdot A} &= \lambda \cdot \chi_A. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung bedeutet $\chi_\varnothing(x) = 0$ für alle $x \in X$, was nach der Definition von $\chi_\varnothing$ sofort aus $x \notin \varnothing$ folgt. Die letzte Gleichung gilt wegen $\chi_{1\cdot A} = \chi_A = 1 \cdot \chi_A$ und $\chi_{0\cdot A} = \chi_\varnothing = 0 = 0 \cdot \chi_A$. Die zweite Gleichung bedeutet $\chi_{A+B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x)$ für alle $x \in X$, was man separat verifiziert, je nachdem, in welcher der vier Mengen $A \cap B$, $A \smallsetminus B$, $B \smallsetminus A$, $A \cup B$ das Element x enthalten ist. Am interessantesten ist der Fall $x \in A \cap B$, in welchem $x \notin A + B$ gilt und daher in $\mathbb{F}_2$:

$$\chi_{A+B}(x) \;=\; \chi_\varnothing(x) \;=\; 0 \;\overset{!}{=}\; 1 + 1 \;=\; \chi_A(x) + \chi_B(x).$$

Da $(\mathbb{F}_2^X, +, \cdot, 0)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist, folgt durch direkte Übertragung aller Axiome, dass auch $(P, +, \cdot, \varnothing)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

4. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ sind reelle Unterräume?

$$\begin{aligned} V_1 &:= \big\{\, (0, x, 2x, 3x) \;\big|\; x \in \mathbb{R} \,\big\} \\ V_2 &:= \big\{\, (x^4, x^3, x^2, x) \;\big|\; x \in \mathbb{R} \,\big\} \\ V_3 &:= \big\{\, (x, x + y, x - y, y) \;\big|\; x, y \in \mathbb{R} \,\big\} \\ V_4 &:= \big\{\, (x^4 - y^4, 0, 0, 0) \;\big|\; x, y \in \mathbb{R} \,\big\}. \end{aligned}$$

Lösung: Eine Teilmenge U ist genau dann ein Untervektorraum, wenn sie nicht leer ist und für beliebige Elemente $v, w \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $v + w$ und λv wieder in U liegen. In jedem der betrachteten Fälle ist das Nullelement $(0, 0, 0, 0)$ in der Teilmenge enthalten, insbesondere ist die Teilmenge nicht leer; wir müssen also nur noch die übrigen Bedingungen prüfen.

(a) Für beliebige Elemente $v = (0, x, 2x, 3x)$ und $w = (0, y, 2y, 3y)$ aus V_1 und für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} v + w &= \big(0, x + y, 2(x + y), 3(x + y)\big), \\ \lambda v &= \big(0, \lambda x, 2(\lambda x), 3(\lambda x)\big). \end{aligned}$$

Die Elemente $v + w$ und λv sind also wieder in V_1. Das zeigt, dass V_1 ein Untervektorraum ist.

(b) Der Vektor $v := (1, 1, 1, 1)$ liegt in V_2. Der Vektor $2v = (2, 2, 2, 2)$ liegt aber nicht in V_2, denn es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $(2, 2, 2, 2) = (x^4, x^3, x^2, x)$. Folglich ist V_2 kein Untervektorraum.

(c) Seien $v = (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1)$ und $w = (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2)$ zwei beliebige Elemente aus V_3 und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen

$$\begin{aligned} v + w &= \big(x_1 + x_2, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), y_1 + y_2\big) \\ \lambda v &= \big(\lambda x_1, (\lambda x_1) + (\lambda y_1), (\lambda x_1) - (\lambda y_1), \lambda y_1\big) \end{aligned}$$

liegen $v + w$ und λv wieder in V_3. Die Teilmenge V_3 ist also ein Untervektorraum.

(d) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gibt es Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ mit $t = x^4 - y^4$, nämlich

$$(x, y) \;=\; \begin{cases} \big(t^{1/4}, 0\big) & \text{falls } t \geqslant 0, \\ \big(0, (-t)^{1/4}\big) & \text{falls } t < 0. \end{cases}$$

Es gilt also

$$V_4 \;=\; \big\{\, (x^4 - y^4, 0, 0, 0) \;\big|\; x, y \in \mathbb{R} \,\big\} \;=\; \big\{\, (t, 0, 0, 0) \;\big|\; t \in \mathbb{R} \,\big\}.$$

Für beliebige Elemente $v = (t_1, 0, 0, 0)$ und $w = (t_2, 0, 0, 0)$ dieser Teilmenge und beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt $v + w = (t_1 + t_2, 0, 0, 0)$ und $\lambda v = (\lambda t_1, 0, 0, 0)$. Die Elemente $v + w$ und λv sind also wieder in V_4, also ist V_4 ein reeller Untervektorraum.

5. Für einen Körper K und ein $\alpha \in K$ definieren wir

$$U_\alpha := \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = \alpha\}.$$

Zeige, dass U_α genau dann ein Untervektorraum von K^3 ist, wenn $\alpha = 0$ ist.

Lösung: Ist U_α ein Untervektorraum, so enthält U_α den Nullvektor $(x_1, x_2, x_3) := (0, 0, 0)$, also ist $\alpha = x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ist umgekehrt $\alpha = 0$, so ist U_α die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0\,.$$

Aus der Vorlesung wissen wir dann, dass dies ein Untervektorraum ist.

*6. Sei V ein K-Vektorraum und seien V_1, V_2, V_3 Untervektorräume, von denen keiner in einem der anderen enthalten ist. Entscheide, mit Beweis, ob die Vereinigung $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ immer, oder manchmal, oder nie ein Unterraum ist.

Lösung: Sei $V := K^2$ und setze $V_1 := \langle \binom{1}{0} \rangle$ und $V_2 := \langle \binom{0}{1} \rangle$ und $V_3 := \langle \binom{1}{1} \rangle$.

Für $K = \mathbb{Q}$ sind $\binom{2}{0}$ und $\binom{0}{1}$ Elemente von $V_1 \cup V_2 \cup V_3$, aber ihre Summe $\binom{2}{1}$ ist nicht. Die Vereinigung $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ ist also kein Vektorraum.

Für $K = \mathbb{F}_2$ ist $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = \mathbb{F}_2^2$, also insbesondere ein Unterraum. Die korrekte Antwort auf die Frage lautet also „manchmal“.

7. Seien n und m natürliche Zahlen und A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeige, dass Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ linear unabhängig sind genau dann, wenn $Av_1, \ldots, Av_m$ linear unabhängig sind.

Lösung: Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig, so existiert eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ mit $a_1, \ldots, a_m \in K$. Multiplikation mit A liefert dann eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i A v_i = A \cdot (\sum_{i=1}^m a_i v_i) = A \cdot 0 = 0$. Also sind auch $Av_1, \ldots, Av_n$ linear abhängig.

Sind umgekehrt $Av_1, \ldots, Av_m$ linear abhängig, so existiert eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i A v_i = 0$ mit $a_1, \ldots, a_m \in K$. Multiplikation mit A^{-1} liefert dann eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i v_i = A^{-1} \cdot A \cdot (\sum_{i=1}^m a_i v_i) = A^{-1} \cdot (\sum_{i=1}^m a_i A v_i) = A^{-1} \cdot 0 = 0$. Also sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

8. Prüfe, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Löse ein geeignetes lineares Gleichungssystem.

Lösung: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ sind linear unabhängig genau dann, wenn das homogene lineare Gleichungssystem $x_1 v_1 + \ldots + x_4 v_4$ nur die triviale Lösung $x_1 = \ldots = x_4 = 0$ hat. Durch Anwenden des Gaussverfahrens oder direktes Ausprobieren erhält man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind.