Musterlösung Serie 8

Direkte Summe, Komplemente & Lineare Abbildungen

1. Sei V der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge der *geraden Funktionen*
$$V_1 := \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\}$$
bzw. der *ungeraden Funktionen*
$$V_2 := \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$$
ein Untervektorraum von V ist. Zeige ausserdem $V = V_1 \oplus V_2$.

(Hinweis: Betrachte zu $f \in V$ die Funktion $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.)

Lösung: Die Nullfunktion ist sowohl in V_1 als auch in V_2 enthalten; also sind V_1 und V_2 nicht leer.

Für alle geraden Funktionen $f, g \in V_1$ und für alle λ gilt:
$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)\\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x)\end{aligned}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies zeigt, dass $f + g$ und λf wieder gerade Funktionen sind, also in V_1 liegen. Folglich ist V_1 ein Untervektorraum. Der Fall V_2 folgt analog.

Um $V = V_1 \oplus V_2$ zu zeigen, müssen wir beweisen, dass jedes Element aus V als Summe eines Elementes aus V_1 und eines Elementes aus V_2 geschrieben werden kann, und dass $V_1 \cap V_2 = 0$ ist.

Für ein beliebiges Element $f \in V$ definiere Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$f_1(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{und} \quad f_2(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
Wegen
$$f_1(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_1(x) \quad \text{und} \quad f_2(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -f_2(x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f_1 \in V_1$ und $f_2 \in V_2$, und wegen
$$(f_1 + f_2)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f = f_1 + f_2$. Dies zeigt, dass jedes Element aus V als Summe eines Elementes aus V_1 und eines Elementes aus V_2 geschrieben werden kann.

Sei schliesslich $f \in V_1 \cap V_2$ beliebig. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(-x) = -f(x).$$

Daraus folgt $f(x) + f(x) = 2f(x) = 0$, und da 2 in $\mathbb{R}$ invertierbar ist, schon $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist $f = 0$.

2. Betrachte den Unterraum

$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^4$. Finde eine Basis eines Komplements von V in $\mathbb{R}^4$.

Lösung: Wenn wir von beiden Vektoren die ersten beiden Koeffizienten herausziehen, erhalten wir die Vektoren $\binom{0}{1}$ und $\binom{1}{1}$. Diese sind linear unabhängig, da keiner ein Vielfaches des anderen ist. Wir vertauschen die beiden Vektoren und nehmen die Standardbasisvektoren e_3 und e_4 dazu und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\neq 0$ ist diese invertierbar. Daher bilden die beiden gegebenen Vektoren zusammen mit e_3 und e_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Somit ist das Erzeugnis $\langle e_3, e_4 \rangle$ ein Komplement von U.

Aliter: Wir schreiben die zwei Erzeuger von V in eine Matrix und ergänzen daneben die Identitätsmatrix:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden das Gaussverfahren auf die Matrix A an und erhalten die Zeilenstufenform:

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die ersten vier Spaltenvektoren der Matrix A bilden demnach eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Mit $U := \langle (1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T \rangle$ gilt also $U + V = \mathbb{R}^4$. Mit der Dimensionsformel für Unterräume, oder direkt unter Ausnutzung der linearen Unabhängigkeit der ersten vier Spaltenvektoren von A, folgern wir $V \cap U = \{0\}$. Also ist U ein Komplement von V in $\mathbb{R}^4$. Die Vektoren $(1,0,0,0)^T$ und $(0,1,0,0)^T$ sind linear unabhängig und bilden deshalb eine Basis von U.

3. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, 2x, 0)$

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, 2x, 1)$

   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität

   (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

   (g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

   Lösung: Die Abbildung (a) ist die Rechtsmultiplikation R_A mit der Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   und somit linear. Die Abbildungen (c), (d) und (e) sind gegeben durch Linksmultiplikation mit den Matrizen

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ (0)\ \text{ und } (1).$$

   Daher sind diese Abbildungen linear.

   Die Abbildungen (b), (f) und (g) bilden den Nullvektor auf einen von Null verschiedenen Vektor ab, nämlich auf $(0,0,1)$, bzw. 1, bzw. $(-1,1)$. Diese drei Abbildungen sind daher nicht linear.

4. Berechne eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $\mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$, die durch Linksmultiplikation mit der folgenden Matrix definiert ist:

   $$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das Gaussverfahren liefert die folgende Basis des Kerns:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

sowie die folgende Basis des Bildes:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

5. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P\colon V \to V$ mit der Eigenschaft $P^2 := P \circ P = P$ heisst *idempotent* oder eine *Projektion*. Zeige:

   (a) Für jede Projektion P gilt

   $$V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P).$$

   (b) Für beliebige Untervektorräume $W_1, W_2 \subset V$ mit $V = W_1 \oplus W_2$ existiert eine eindeutige Projektion $P\colon V \to V$ mit

   $$\mathrm{Kern}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(P) = W_2\,.$$

Lösung:

(a) Sei $P\colon V \to V$ eine Projektion und setze

$$W_1 := \mathrm{Kern}(P) \quad \text{und} \quad W_2 := \mathrm{Bild}(P)\,.$$

Wir müssen zeigen, dass $W_1 + W_2 = V$ und $W_1 \cap W_2 = 0$ ist.
Für ein beliebiges $v \in V$ gilt

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0,$$

also ist $v - P(v) \in \mathrm{Kern}(P) = W_1$. Weiter ist $P(v) \in \mathrm{Bild}(P) = W_2$. Damit ist

$$v = (v - P(v)) + P(v) \in W_1 + W_2,$$

und es gilt $W_1 + W_2 = V$.
Sodann sei $v \in W_1 \cap W_2$. Da v im Bild von P liegt, gibt es ein $w \in V$ mit $P(w) = v$. Wenden wir P auf beide Seiten der Gleichung an, so folgt $v = P(w) = P^2(w) = P(v)$. Da aber v auch im Kern von P liegt, haben wir $v = P(v) = 0$. Somit ist $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(b) Seien $W_1, W_2 \subseteq V$ beliebige Untervektorräume von V mit $V = W_1 \oplus W_2$. Für jedes $v \in V$ existieren dann eindeutige $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$, sodass $v = w_1 + w_2$ ist. Betrachte die Abbildung $P\colon V \to V$, die einem solchen $v \in V$ genau dieses $w_2 \in W_2$ zuordnet. Man prüft nun direkt, dass P linear und eine Projektion mit $W_1 = \mathrm{Kern}(P)$ und $W_2 = \mathrm{Bild}(P)$ ist.

Es bleibt zu zeigen, dass P eindeutig ist. Sei P' eine weitere Projektion mit $W_1 = \mathrm{Kern}(P')$ und $W_2 = \mathrm{Bild}(P')$. Dann ist

$$P|_{W_1} = 0 = P'|_{W_1}\,.$$

Für ein beliebiges Element $v \in W_2$ gibt es Elemente $w, w' \in V$, so dass $P(w) = v$ und $P'(w') = v$ ist. Es folgt

$$P(v) - P'(v) = P(P(w)) - P'(P'(w')) = P(w) - P'(w') = v - v = 0$$

und damit $P|_{W_2} = P'|_{W_2}$. Da $V = W_1 + W_2$ ist, gilt damit $P = P'$.

6. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeige:

(a) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

$$f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$

ein Unterraum von V.

(b) Es gilt

$$\dim f^{-1}(W') = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap W')\,.$$

Lösung: Sei $V' := f^{-1}(W')$.

(a) Wir müssen zeigen, dass V' nicht leer ist und dass für beliebige Elemente $x, y \in V'$ und beliebige $\alpha \in K$ die Summe $x + y$ und das Produkt αx wieder in V' liegen.

Wegen $f(0) = 0 \in W'$ liegt 0 in V' und V' ist nicht leer. Da f linear ist, gilt

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{und} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)\,.$$

Wegen $f(x)$, $f(y) \in W'$ folgt aus den Unterraumaxiomen, dass auch $f(x) + f(y)$ und $\alpha f(x)$ wieder in W' liegen. Somit liegen $x + y$ und αx wieder in V'.

(b) Aus der Definition von V' folgt, dass wir eine wohldefinierte Abbildung

$$f'\colon V' \to W',\ v' \mapsto f'(v') := f(v)$$

haben. Da f linear ist, ist auch diese linear. Es folgt

$$\dim(V') = \dim(\mathrm{Kern}(f')) + \dim(\mathrm{Bild}(f')). \tag{1}$$

Da $0 \in W'$ ist, gilt $\operatorname{Kern}(f) \subset V'$. Durch Einsetzen der Definition erhält man $\operatorname{Kern}(f') = \operatorname{Kern}(f)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Bild}(f') &= \{w \in W' \mid \exists v \in V' : f'(v) = w\} \\
&= \{w \in W' \mid \exists v \in V : f(v) = w\} \\
&= \{w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w \text{ und } w \in W'\} \\
&= \operatorname{Bild}(f) \cap W' .
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man

$$\dim(V') = \dim(\operatorname{Kern}(f)) + \dim(\operatorname{Bild}(f) \cap W') .$$

Aliter: Man kann auch den Beweis der Vorlesung wiederholen, mit einer Basis B' von $\operatorname{Kern}(f)$ beginnen, diese zu einer Basis B von $f^{-1}(W')$ erweitern und zeigen, dass f das Komplement $B \smallsetminus B'$ bijektiv auf eine Basis von W' abbildet.

7. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige:

   (a) Die Abbildung f ist injektiv genau dann, wenn eine lineare Abbildung $g\colon W \to V$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ (Linksinverse).

   (b) Die Abbildung f ist surjektiv genau dann, wenn eine lineare Abbildung $g\colon W \to V$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$ (Rechtsinverse).

   Lösung:

   (a) Ist $g \circ f = \mathrm{id}_V$, so ist $g \circ f$ injektiv und folglich auch f injektiv. Dies zeigt die Implikation „$\Leftarrow$“.
   Sei umgekehrt f injektiv. Dann ist mit $W_1 := \operatorname{Bild}(f)$ die Abbildung

   $$f\colon V \to W_1$$

   bijektiv und linear, also ein Isomorphismus. Sei $g_1\colon W_1 \to V$ die Umkehrabbildung. Wähle ein Komplement W_2 zu W_1 in W und definiere die Abbildung

   $$g\colon W \to V$$

   durch $g(w_1 + w_2) := g_1(w_1)$ für alle $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$. Wegen $W = W_1 \oplus W_2$ ist g wohldefiniert und man prüft direkt, dass g linear ist. Für alle $v \in V$ ist weiter $f(v) \in W_1$ und somit

   $$g \circ f(v) = g|_{W_1}(f(v)) = g_1(f(v)) = v$$

   also ist $g \circ f = \mathrm{id}_V$. Dies zeigt die Implikation „$\Rightarrow$“.

(b) Ist $f \circ g = \mathrm{id}_W$, so ist $w = \mathrm{id}_W(w) = f(g(w))$ für jedes $w \in W$, die Abbildung f also surjektiv. Dies zeigt die Implikation „$\Leftarrow$“.

Sei umgekehrt f surjektiv. Sei V_2 ein Komplement von $V_1 := \mathrm{Kern}(f)$ in V und betrachte die Abbildung

$$f_2 := f|_{V_2} \colon V_2 \to W.$$

Dann ist $\mathrm{Kern}(f_2) = \mathrm{Kern}(f) \cap V_2 = V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und somit f_2 injektiv. Nach Voraussetzung existiert für jedes $w \in W$ ein $v \in V$ mit $f(v) = w$. Schreiben wir $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$, so folgt $f(v) = f(v_2) = w$. Daher ist f_2 auch surjektiv und damit ein Isomorphismus von V_2 nach W.

Sei $g' \colon W \to V_2$ die Umkehrabbildung von f_2 und sei g die Komposition von g' mit der Inklusionsabbildung $V_2 \hookrightarrow V$. Da g' und die Inklusionsabbildung linear sind, ist g linear. Für alle $w \in W$ ist $g(w) \in V_2$ und es gilt

$$f(g(w)) = f|_{V_2}(g(w)) = f_2(g(w)) = w\,,$$

also ist $f \circ g = \mathrm{id}_W$. Dies zeigt die Implikation „$\Rightarrow$“.