Musterlösung Serie 9

Lineare Abbildungen, Kern, Bild, Darstellungsmatrizen & Rang

1. Sei V ein beliebiger Vektorraum. Beweise oder widerlege:

   (a) Sei $V' \subset V$ ein Unterraum. Jeder Automorphismus $f\colon V' \to V'$ kann zu einem Automorphismus $\overline{f}\colon V \to V$ fortgesetzt werden.

   (b) Für jeden Endomorphismus $f\colon V \to V$ gilt $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$.

   (c) Jeder Vektorraum ist eine innere direkte Summe von 1-dimensionalen Unterräumen.

   (d) Für Unterräume V_1, V_2, V_3 von V gilt $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ genau dann, wenn $V = V_1 + V_2 + V_3$ und $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{0\}$ ist.

Lösung:

(a) Diese Aussage ist richtig. Wähle ein Komplement von V', das heisst, einen Unterraum V'' von V mit $V = V' \oplus V''$. Dann ist die Abbildung

$$V' \times V'' \to V,\ (v', v'') \mapsto v' + v''$$

bijektiv. Definiere eine Abbildung $\bar{f}\colon V \to V$ durch $\bar{f}(v' + v'') := f(v') + v''$ für alle $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Da f linear ist, zeigt eine direkte Rechnung, dass auch $\bar{f}$ linear ist. Wir behaupten, dass $\bar{f}$ bijektiv ist.

Seien dafür zunächst $v' \in V'$ und $v'' \in V''$ mit $f(v') + v'' = 0$. Dann ist $f(v') = -v'' \in V' \cap V'' = \{0\}$ und somit $f(v') = v'' = 0$. Wegen der Injektivität von f ist dann auch $v' = 0$. Also ist $\mathrm{Kern}(\bar{f}) = \{0\}$ und somit $\bar{f}$ injektiv.

Sei andererseits $v \in V$ beliebig. Schreibe $v = v' + v''$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Dann ist $v' = f(f^{-1}(v'))$ und somit $v = f(f^{-1}(v')) + v'' = \bar{f}(f^{-1}(v') + v'')$. Also ist $\bar{f}$ surjektiv.

Insgesamt ist $\bar{f}$ bijektiv und daher ein Isomorphismus $V \to V$, also ein Automorphismus von V.

(b) Diese Aussage ist falsch. Betrachte zum Beispiel den durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegebenen Endomorphismus $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dann ist $\mathrm{Kern}(L_A) = \langle (1,0)^T \rangle = \mathrm{Bild}(L_A)$. Die zwei Unterräume haben weder den Durchschnitt $\{0\}$, noch erzeugen sie zusammen $\mathbb{R}^2$, daher können sie nicht die innere direkte Summe $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$ bilden.

(c) Diese Aussage ist richtig. Sei B eine Basis von V. Dann ist die Abbildung

$$\boxplus_{b\in B} K \to V,\ (x_b)_b \mapsto \sum_{b\in B}{}' x_b b$$

bijektiv. Andererseits ist jeder Vektor $b \in B$ ungleich Null und somit die Abbildung $K \to \langle b\rangle$, $x_b \mapsto x_b b$ bijektiv. Also ist auch die Abbildung

$$\boxplus_{b\in B} \langle b\rangle \to V,\ (v_b)_b \mapsto \sum_{b\in B}{}' v_b$$

bijektiv. Somit ist $V = \bigoplus_{b\in\mathcal{B}}\langle b\rangle$.

(d) Diese Aussage ist falsch, zum Beispiel für die Unterräume $V_1 := \langle\binom{1}{0}\rangle$ und $V_2 := \langle\binom{0}{1}\rangle$ und $V_3 := \langle\binom{1}{1}\rangle$ von K^2.

*2. Betrachte K-Vektorräume V_i für alle $i \in I$. Zeige die universellen Eigenschaften des Produkts und und der äusseren direkten Summe:

(a) Für jeden Vektorraum W zusammen mit linearen Abbildungen $f_i\colon W \to V_i$ für alle $i \in I$ existiert genau eine lineare Abbildung $f\colon W \to \times_{i\in I} V_i$ so dass für alle $j \in I$ die Verknüpfung $\mathrm{proj}_j \circ f = f_j$ ist.

(b) Für jeden Vektorraum W zusammen mit linearen Abbildungen $f_i\colon V_i \to W$ für alle $i \in I$ existiert genau eine lineare Abbildung $f\colon \boxplus_{i\in I} V_i \to W$ so dass für alle $j \in I$ die Verknüpfung $f \circ \mathrm{incl}_j = f_j$ ist.

Lösung:

(a) Wir definieren die Abbildung $f\colon W \to \times_{i\in I} V_i$ durch $w \mapsto (f_i(w))_{i\in I}$. Damit gilt für alle $j \in I$ automatisch $\mathrm{proj}_j \circ f(w) = \mathrm{proj}_j((f_i(w))_{i\in I}) = f_j(w)$ für alle $w \in W$. Die Abbildung f ist linear, was aus der Linearität der Abbildungen f_i für $i \in I$ folgt. Sei nun $g\colon W \to \times_{i\in I} V_i$ eine weitere lineare Abbildung so dass $\mathrm{proj}_j \circ g = f_j$ ist für alle $j \in I$. Dann folgt direkt, dass für alle $w \in W$ gilt $g(w) = (f_i(w))_{i\in I} = f(w)$ und daher folgt $g = f$.

(b) Wir definieren die Abbildung $f\colon \boxplus_{i\in I} V_i \to W$ durch $(v_i)_{i\in I} \mapsto \sum'_{j\in I} f_j(v_j)$. Die Summe ist eine endliche Summe, weil v_i für alle ausser endlich vielen $i \in I$ gleich null ist. Daher ist f wohldefiniert. Zudem gilt für alle $j \in I$ und alle $v \in V_j$ automatisch $f \circ \mathrm{incl}_j(v) = f_j(v)$. Weil f_i für jedes $i \in I$ eine lineare Abbildung ist, folgt durch eine kurze Überprüfung, dass auch f linear ist. Sei nun $g\colon \boxplus_{i\in I} V_i \to W$ eine weitere lineare Abbildung so dass $g \circ \mathrm{incl}_j = f_j$ ist für alle $j \in I$. Sei $(v_i)_{i\in I} \in \boxplus_{i\in I} V_i$. Dann ist

$$g((v_i)_{i\in I}) = g\Big(\sum_{i\in I}{}' \mathrm{incl}_i(v_i)\Big) = \sum_{i\in I}{}' g(\mathrm{incl}_i(v_i)) = \sum_{i\in I}{}' f_i(v_i) = f((v_i)_{i\in I})$$

und daher ist $g = f$.

3. Zeige: Das folgende Diagramm kommutiert insgesamt genau dann, wenn alle 6 Teilquadrate kommutieren.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "a_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[d, "f_4"] \\
B_1 \arrow[r, "b_1"] \arrow[d, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "b_2"] \arrow[d, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "b_3"] \arrow[d, "g_3"] & B_4 \arrow[d, "g_4"] \\
C_1 \arrow[r, "c_1"] & C_2 \arrow[r, "c_2"] & C_3 \arrow[r, "c_3"] & C_4
\end{tikzcd}$$

Lösung: Gemäss Definition kommutiert ein Diagramm (insgesamt) genau dann, wenn für je zwei Wege in Pfeilrichtung mit demselben Startpunkt und demselben Endpunkt die zusammengesetzten Abbildungen übereinstimmen. Daraus folgt insbesondere, dass jedes Teilquadrat kommutiert.

Wir müssen also die umgekehrte Richtung zeigen.

Angenommen jedes Teilquadrat kommutiert, das heisst, angenommen es gilt

$$c_i \circ g_i = g_{i+1} \circ b_i \quad \text{und} \quad b_i \circ f_i = f_{i+1} \circ a_i$$

für $i = 1, 2, 3$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
(c_3 \circ c_2 \circ c_1) \circ (g_1 \circ f_1) &= c_3 \circ c_2 \circ g_2 \circ b_1 \circ f_1 \\
&= c_3 \circ g_3 \circ b_2 \circ b_1 \circ f_1 \\
&= g_4 \circ b_3 \circ b_2 \circ b_1 \circ f_1 \\
&= g_4 \circ b_3 \circ b_2 \circ f_2 \circ a_1 \\
&= g_4 \circ b_3 \circ f_3 \circ a_2 \circ a_1 \\
&= (g_4 \circ f_4) \circ (a_3 \circ a_2 \circ a_1),
\end{aligned}$$

also kommutiert auch das äussere Rechteck.

Wir betrachten den Fall der Wege $c_3 \circ c_2 \circ g_2 \circ f_2$ und $g_4 \circ b_3 \circ f_3 \circ a_2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
c_3 \circ c_2 \circ g_2 \circ f_2 &= c_3 \circ g_3 \circ b_2 \circ f_2 \\
&= g_4 \circ b_3 \circ b_2 \circ f_2 \\
&= g_4 \circ b_3 \circ f_3 \circ a_2,
\end{aligned}$$

also kommutieren auch diese zwei Wege.

Es gibt eine endliche Anzahl von Wegen mit dem selben Start- und Endpunkt. Mit einem analogen Argument zu oben, prüft man für diese direkt, dass sie kommutieren.

Alternativ zeigt man die Aussage der Aufgabe im allgemeineren Fall eines Rechteckdiagrams R mit m Zeilen und n Spalten, wobei die Pfeile immer nach rechts bzw. unten zeigen (das in der Aufgabe betrachtete hat $m = 3$ Zeilen und $n = 4$ Spalten). Um dies zu zeigen, verwendet man Induktion über die Fläche $m \cdot n$ des Rechteckes. Der entscheidende Schritt ist dabei der folgende: Zwei beliebige Wege mit demselben Startpunkt A und demselben Endpunkt B liegen in dem Rechteckdiagramm R', welches durch die zwei gegenüberliegenden Ecken A und B gegeben ist. Falls A nicht die links-obere Ecke von R oder B nicht die rechts-untere Ecke von R ist, ist die Grösse von R' kleiner als R und die Behauptung folgt aus der Induktionsvoraussetzung. Falls $R = R'$ ist, folgt die Aussage direkt durch ein analoges Argument wie oben.

4. Seien lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}.$$

Sei weiterhin

$$a := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

sei b die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und sei

$$c := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Zeige, dass a eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimme $g \circ f$ und die Darstellungsmatrix ...

(i) von f bezüglich der Basen a, b.

(ii) von g bezüglich der Basen b, c.

(iii) von $g \circ f$ bezüglich der Basen a, c.

Lösung: (a) Man prüft durch Anwendung des Gaussalgorithmus, dass die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

invertierbar sind. Dies zeigt, dass a eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und c eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Die Abbildungen f und g sind durch Linksmultiplikation mit einer Matrix darstellbar, nämlich $f = L_U$ und $g = L_V$ für

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $g \circ f = L_V \circ L_U = L_{VU}$ für die Matrix

$$VU = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen U, V, VU sind gleichzeitig die Darstellungsmatrizen von $f, g, g \circ f$ bezüglich der jeweiligen Standardbasen b_n von $\mathbb{R}^n$, das heisst, es gilt

$$U = {}_{b_2}[f]_{b_4}, \quad V = {}_{b_3}[g]_{b_2} \quad \text{und} \quad VU = {}_{b_3}[g \circ f]_{b_4}.$$

Die Matrix A ist die Basiswechselmatrix $A = {}_{b_4}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}]_a$ und die Matrix C ist die Basiswechselmatrix $C = {}_{b_3}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_c$.

(i) Die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basen a und b ist

$$\begin{aligned} {}_b[f]_a &= {}_b[f]_{b_4} \cdot {}_{b_4}[\mathrm{id}_{K^4}]_a \\ &= U \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 11 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} {}_c[g]_b &= {}_c[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{b_3} \cdot {}_{b_3}[g]_b \\ &= {}_{b_3}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_c^{-1} \cdot {}_{b_3}[g]_b \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Die Darstellungsmatrix von $g \circ f$ bezüglich der Basen a und c ist

$$\begin{aligned} {}_c[g \circ f]_a &= {}_c[g]_b \cdot {}_b[f]_a \\ &= \begin{pmatrix} -3 & -10 & -4 & -7 \\ -2 & -11 & -4 & -5 \\ 10 & 42 & 16 & 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ -2x+4y \\ 3x-6y \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Finde Basen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, bezüglich welcher die Darstellungsmatrix von f die Form $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \leqslant r, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $r = \mathrm{Rang}(A)$ annimmt.

Lösung: Mit dem Gaussverfahren berechnen wir

$$\mathrm{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Das Bild von f ist von den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ erzeugt; da der zweite ein Vielfaches des ersten ist, folgt also

$$\mathrm{Bild}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Dann ist

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und

$$\mathcal{B}' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ hat die Darstellungsmatrix von f dann die gewünschte Form:

$$_{\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

6. Betrachte den durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

definierten Endomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(a) Verifiziere die Gleichungen $f^2 := f \circ f \neq 0$ und $f^3 := f \circ f \circ f = 0$.

(b) Finde eine Basis u, v, w von $\mathbb{R}^3$ mit $f(u) = 0$ und $f(v) = u$ und $f(w) = v$.

(c) Bestimme die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basis (u, v, w).

Lösung: (a) Wir berechnen

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Mit dem Gaussverfahren bestimmen wir

$$\mathrm{Kern} f^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wähle nun einen beliebigen Vektor $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{Kern}(f^2)$, z. B. $w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und setze

$$v := f(w) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u := f(v) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Matrix

$$(w, v, u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix mit allen Diagonaleinträgen ungleich Null und somit invertierbar. Also ist $\mathcal{B} := \big(u, v, w\big)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ mit der gewünschten Eigenschaft.

(c) Aus den Gleichungen in (b) folgt direkt, dass die Darstellungsmatrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben ist durch

$$_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$