D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2021
Prof. Richard Pink

Musterlösung Serie 10

Darstellungsmatrizen, Rang, Dualraum, Quotientenvektorraum

1. Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Polynome von Grad $\leqslant n$ mit reellen Koeffizienten.

   (a) Zeige, dass
   $$F\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})\ p \mapsto p'' + p'$$
   eine lineare Abbildung ist, wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.

   (b) Bestimme die Matrix von F bezüglich der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ von $P_n(\mathbb{R})$.

   Lösung:

   (a) Wegen
   $$(\lambda p + \mu q)' = (\lambda p)' + (\mu q)' = \lambda p' + \mu q'$$
   für alle $p, q \in P_n(\mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist die Ableitungsabbildung $p \mapsto p'$ linear. Da die Verknüpfung linearer Abbildungen wieder linear ist, ist auch die Bildung der zweiten Ableitung linear. Da die Summe zweier linearer Abbildungen linear ist, ist somit auch $p \mapsto p'' + p'$ linear.

   (b) Es gilt
   $$F(x^j) = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ 1 & \text{für } j = 1 \\ jx^{j-1} + j(j-1)x^{j-2} & \text{für } j \geqslant 2\,. \end{cases}$$
   Also die Darstellungsmatrix von F bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B} = (1, x, \ldots, x^n)$ gleich
   $${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \big(j\delta_{i,j-1} + j(j-1)\delta_{i,j-2}\big)_{0\leqslant i,j\leqslant n},$$
   wobei die Indizierung der Matrix bei 0 beginnt.
   Für $n \geqslant 2$ lässt sich diese Matrix alternativ auch schreiben als
   $${}_{\mathcal{B}}[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Seien U, V, W beliebige Vektorräume. Beweise die folgenden Ungleichungen:

(a) Für beliebige lineare Abbildungen $f, g\colon U \to V$ gilt

$$\mathrm{Rang}(f+g) \ \leqslant \ \mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g).$$

(b) Für beliebige lineare Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ gilt

$$\mathrm{Rang}(g \circ f) \ \leqslant \ \min\big\{\mathrm{Rang}(f), \mathrm{Rang}(g)\big\}.$$

(c) Formuliere und beweise die analoge Eigenschaft für Matrizen.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\mathrm{Bild}(f+g) \subset \mathrm{Bild}(f) + \mathrm{Bild}(g),$$

woraus folgt

$$\mathrm{Rang}(f+g) = \dim \mathrm{Bild}(f+g) \leqslant \dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \mathrm{Bild}(g) = \mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g)\,.$$

(b) Wegen $\mathrm{Bild}(g \circ f) \subset \mathrm{Bild}(g)$ gilt $\mathrm{Rang}(g \circ f) \leqslant \mathrm{Rang}(g)$. Da die Abbildung

$$g|_{\mathrm{Bild}(f)} : \mathrm{Bild}(f) \to \mathrm{Bild}(g \circ f)$$

linear und surjektiv ist, gilt zudem

$$\dim \mathrm{Bild}(g \circ f) = \dim \mathrm{Bild}(f) - \dim \mathrm{Kern}(g|_{\mathrm{Bild}(f)}) \leqslant \dim \mathrm{Bild}(f)$$

und damit auch die Gesamtaussage.

(c) Da der Rang der $n \times m$-Matrix A gleich dem Rang der linearen Abbildung $L_A : K^m \to K^n$, $v \mapsto Av$ ist, folgt:

(i) Für beliebige $n \times m$ Matrizen A und B gilt:

$$\mathrm{Rang}(A+B) \leqslant \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(B)\,.$$

(ii) Für jede $m \times n$ Matrix A und jede $n \times r$ Matrix B gilt:

$$\mathrm{Rang}(AB) \leqslant \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))\,.$$

3. Bestimme die Ränge der folgenden rationalen $n \times n$-Matrizen in Abhängigkeit von der positiven ganzen Zahl n.

   (a) $(k\ell)_{k,\ell=1,\ldots,n}$

   (b) $\big((-1)^{k+\ell}(k+\ell-1)\big)_{k,\ell=1,\ldots,n}$

   *(c) $\left(\dfrac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}\right)_{k,\ell=0,\ldots,n-1}$

   Lösung:

   (a) Setze $B := (b_{kl})_{k,l=1,\ldots,n} := (kl)_{k,l=1,\ldots,n}$. Sei $B' = (b'_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ die Matrix, die aus B entsteht, indem man für jedes $k = 2,\ldots,n$ das k-fache der ersten Zeile von der k-ten Zeile subtrahiert. Dann gilt

$$b'_{kl} = \begin{cases} b_{kl} = l & \text{falls } k = 1 \\ b_{kl} - kb_{1l} = kl - kl = 0 & \text{falls } k > 1\,. \end{cases}$$

   Daher hat die Matrix B' genau eine nicht verschwindende Zeile und somit Rang 1. Da B' durch elementare Zeilenoperationen aus B entstanden ist, also durch Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix, hat B' denselben Rang wie B. Also folgt $\mathrm{Rang}(B) = 1$.

   Aliter: Sei $u := (1,\ldots,n)$ die $1 \times n$ Matrix mit Eintrag i an der Position $(1,i)$. Dann gilt $B = u^T \cdot u$. Da $\mathrm{Rang}(u) \leqslant 1$ ist, folgt aus Aufgabe 3 (c), dass auch $\mathrm{Rang}(B) \leqslant 1$ ist. Wegen $B \neq 0$ gilt zudem $\mathrm{Rang}(B) \geqslant 1$ und daher $\mathrm{Rang}(B) = 1$.

   (b) Sei $B := (b_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ mit $b_{kl} := (-1)^{k+l}(k+l-1)$. Für $n = 1$ hat $B = (1) \neq 0$ Rang 1, wir können also $n \geqslant 2$ annehmen. Für alle $k = 1,\ldots,n-2$ und $\ell = 1,\ldots,n$ gilt

$$b_{kl} + 2b_{k+1,l} + b_{k+2,l} = 0,$$

   also ist die k-te Zeile von B eine Linearkombination der $(k+1)$-ten und der $(k+2)$-ten Zeile. Man kann daher B durch Zeilenoperationen zu einer Matrix umformen, in der bis auf die letzten beiden Zeilen alle Einträge verschwinden und die letzten beiden Zeilen mit denen von B übereinstimmen. Man prüft dann direkt, dass diese beiden Zeilen linear unabhängig sind. Es folgt

$$\mathrm{Rang}\, B = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ 2 & \text{falls } n \geqslant 2. \end{cases}$$

   (c) Sei $C_n := (c_{kl})_{k,l=0,\ldots,n-1}$ die Matrix mit $c_{kl} := \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!} = \binom{k+l}{l}$.

   Behauptung: $\mathrm{Rang}(C_n) = n$.

   Beweis: Wir benutzen Induktion über n. Im Fall $n = 1$ stimmt die Behauptung, da $C_1 = (1) \neq 0$ ist. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geqslant 1$.

Sei $C' = (c'_{kl})_{k,l=0,\ldots,n}$ die Matrix, welche aus C_{n+1} entsteht, indem man beginnend mit der letzten Zeile jeweils die vorhergehende Zeile subtrahiert. In Formeln:

$$c'_{kl} := \begin{cases} c_{kl} - c_{k-1,l} & \text{falls } k = 1,\ldots,n \\ c_{0l} & \text{falls } k = 0\,. \end{cases}$$

Sei weiter $C'' = (c''_{kl})_{k,l=0,\ldots,n}$ diejenige Matrix, welche aus C' entsteht, indem man beginned mit der letzten Spalte jeweils die vorhergehende Spalte subtrahiert. In Formeln:

$$c''_{kl} := \begin{cases} c'_{kl} - c'_{k,l-1} & l = 1,\ldots,n \\ c'_{k0} & l = 0\,. \end{cases}$$

Für alle $1 \leqslant k, l \leqslant n$ gilt dann

$$\begin{aligned} c''_{kl} &= c'_{kl} - c'_{k,l-1} \\ &= (c_{kl} - c_{k-1,l}) - (c_{k,l-1} - c_{k-1,l-1}) \\ &= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} - \frac{(k+\ell-1)!}{(k-1)!\ell!} - \frac{(k+\ell-1)!}{k!(\ell-1)!} + \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!} \\ &= \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}\left(1 - \frac{k}{k+1} - \frac{l}{k+l}\right) + \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!} \\ &= \frac{(k+\ell-2)!}{(k-1)!(\ell-1)!}\,. \end{aligned}$$

Daher ist

$$C'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_n & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$\operatorname{Rang} C_{n+1} = \operatorname{Rang}(C'') = 1 + \operatorname{Rang} C_n = n + 1.$$

4. (a) Sei V' ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Zeige, dass jede Linearform auf V' eine Fortsetzung zu einer Linearform auf V besitzt.

   (b) Sei $V = V_1 \oplus V_2$. Konstruiere und beweise einen Isomorphismus

$$V^\vee \cong V_1^\vee \boxplus V_2^\vee\,.$$

Lösung:

(a) Sei $\alpha : V' \to K$ eine beliebige Linearform. Zu dem Unteraum V' wähle ein Komplement V'' in V und definiere die Abbildung $\widetilde{\alpha} : V \to K$ durch

$$\widetilde{\alpha}(v) := \alpha(v')$$

für jedes $v = v' + v''$ mit $v' \in V'$ und $v'' \in V''$. Wegen $V = V' \oplus V''$ ist $\widetilde{\alpha}$ wohldefiniert. Man zeigt nun direkt, dass $\widetilde{\alpha}$ auch linear, also ein Element von $V^\vee$ ist. Wegen $\widetilde{\alpha}_{|V'} = \alpha$ ist die Behauptung bewiesen.

(b) Für jede Linearform $\ell \colon V \to K$ und jedes $i = 1, 2$ ist die Einschränkung $\ell|_{V_i} \colon V_i \to K$ wieder linear. Wir haben also eine wohldefinierte Abbildung

$$\psi \colon V^\vee \to V_1^\vee \times V_2^\vee = V_1^\vee \boxplus V_2^\vee, \quad \ell \mapsto (\ell|_{V_1}, \ell|_{V_2}).$$

Eine direkte Rechnung zeigt, dass ψ eine lineare Abbildung ist.

Wegen $V = V_1 + V_2$ ist jede Linearform $\ell \colon V \to K$ schon durch ihre Einschränkungen auf V_1 und V_2 bestimmt. Also ist ψ injektiv.

Weiter betrachte beliebige Linearformen $\ell_1 \colon V_1 \to K$ und $\ell_2 \colon V_2 \to K$. Weil jedes Element $v \in V$ auf eindeutige Weise als Summe $v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ geschrieben werden kann, können wir eine wohldefinierte Abbildung $\ell \colon V \to K$ konstruieren durch $\ell(v_1 + v_2) = \ell_1(v_1) + \ell_2(v_2)$. Man zeigt direkt, dass dieses ℓ linear ist. Aus der Konstruktion folgt ausserdem $\psi(\ell) = (\ell_1, \ell_2)$. Also ist ψ surjektiv.

Somit ist ψ eine bijektive lineare Abbildung, also ein Isomorphismus.

5. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V, sei $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ die dazu duale Basis des Dualraums $V^\vee$, und sei $(k_1, \ldots, k_n)$ die zu $B^\vee$ duale Basis des Bidualraums $(V^\vee)^\vee$. Zeige, dass der natürliche Isomorphismus

$$\mathrm{ev} \colon V \xrightarrow{\sim} (V^\vee)^\vee, \ v \mapsto \mathrm{ev}_v$$

jedes v_j auf das entsprechende k_j abbildet.

Lösung: Die duale Basis ist charakterisiert durch die Bedingung $\ell_i(v_j) = \delta_{i,j}$ für alle i, j. Analog gilt $k_j(\ell_i) = \delta_{i,j}$ für alle i, j. Ausserdem ist die Auswertungsabbildung definiert durch $\mathrm{ev}_v(\ell) = \ell(v)$ für alle $v \in V$ und $\ell \in V^\vee$. Für alle i, j folgt daraus

$$\mathrm{ev}_{v_j}(\ell_i) \ = \ \ell_i(v_j) \ = \ \delta_{i,j} \ = \ k_j(\ell_i).$$

Somit stimmen die beiden linearen Abbildungen $\mathrm{ev}_{v_j} \colon V^\vee \to K$ und $k_j \colon V^\vee \to K$ auf der Basis $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ von $V^\vee$ überein, und sind daher überhaupt gleich.

6. Betrachte den Unterraum

$$U := \langle\ (2,2,2,2,2)^T,\ (1,2,2,2,2)^T,\ (1,1,2,2,2)^T\ \rangle$$

von $V := \mathbb{R}^5$. Bestimme eine Teilmenge der Standardbasis von $\mathbb{R}^5$, welche sich bijektiv auf eine Basis von V/U abbildet.

Lösung: Die Teilmenge muss die Basis eines Komplements von U sein. Durch Probieren finden wir zum Beispiel die Lösung

$$\{\ (0,0,1,0,0)^T,\ (0,0,0,1,0)^T\ \}.$$

7. Beweise die folgende Proposition aus der Zusammenfassung:

Proposition: Für jedes $i = 1,2$ sei V_i ein K-Vektorraum mit geordneter Basis $B_i = (b_{i,1},\ldots,b_{i,n_i})$, sei U_i der von einem Anfangssegment $B_i' = (b_{i,1},\ldots,b_{i,m_i})$ von B_i erzeugte Unterraum von V_i, und betrachte die induzierte geordnete Basis $B_i'' := (\bar{b}_{i,m_i+1},\ldots,\bar{b}_{i,n_i})$ von V_i/U_i mit $\bar{b}_{i,j} := b_{i,j} + U_i$. Jede lineare Abbildung $f\colon V_1 \to V_2$ mit $f(U_1) \subset U_2$ induziert natürliche lineare Abbildungen

$$f'\colon U_1 \to U_2,\ u \mapsto f(u),$$

$$f''\colon V_1/U_1 \to V_2/U_2,\ v + U_1 \mapsto f(v) + U_2,$$

und die Darstellungsmatrix von f hat die Blockdreiecksgestalt

$$_{B_2}[f]_{B_1} \ = \ \begin{pmatrix} _{B_2'}[f']_{B_1'} & * \\ 0 & _{B_2''}[f'']_{B_1''} \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wegen der Voraussetzung $f(U_1) \subset U_2$ induziert f durch Einschränkung eine lineare Abbildung $f'\colon U_1 \to U_2,\ u \mapsto f(u)$. Durch Verknüpfung von f mit der Quotientenabbildung $V_2 \to V_2/U_2$ erhalten wir die lineare Abbildung $V_1 \to V_2/U_2,\ v \mapsto f(v) + U_2$ in deren Kern U_1 liegt. Mit der universellen Eigenschaft induziert diese Abbildung eine lineare Abbildung $f''\colon V_1/U_1 \to V_2/U_2$, die explizit durch $v + U_1 \to f(v) + U_2$ gegeben ist.

Die Darstellungsmatrix $_{B_2}[f]_{B_1} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_2\\ 1\leqslant j\leqslant n_1}}$ ist charakterisiert durch die Formel

$$f(b_{1j}) \ = \ \sum_{i=1}^{n_2} a_{ij} b_{2i}$$

für alle $1 \leqslant j \leqslant n_1$. Betrachte zunächst ein $1 \leqslant j \leqslant m_1$. Dann liegt $f(b_{1j})$ in $f(U_1) \subset U_2$, also ist $a_{ij} = 0$ für alle $m_2 < i \leqslant n_2$. Ausserdem gilt dann

$$f'(b_{1j}) \ = \ f(b_{1j}) \ = \ \sum_{i=1}^{m_2} a_{ij} b_{2i}.$$

Somit hat f' die Darstellungsmatrix ${}_{B_2'}[f']_{B_1'} = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m_2 \\ 1\leqslant j\leqslant m_1}}$. Sei nun andererseits $m_1 < j \leqslant n_1$. Dann gilt

$$f''(\bar{b}_{1j}) \;=\; f(b_{1j}) + U_2 \;=\; \sum_{i=1}^{n_2} a_{ij} b_{2i} + U_2 \;=\; \sum_{i=1}^{n_2} a_{ij}(b_{2i} + U_2) \;=\; \sum_{i=m_2+1}^{n_2} a_{ij}\bar{b}_{2i}.$$

Somit hat f'' die Darstellungsmatrix ${}_{B_2''}[f'']_{B_1''} = (a_{ij})_{\substack{m_2<i\leqslant n_2 \\ m_1<j\leqslant n_1}}$. Zusammengenommen bedeutet all dies, dass die Darstellungsmatrix ${}_{B_2}[f]_{B_1}$ als linken unteren Block die Nullmatrix, als linken oberen Block die Matrix ${}_{B_2'}[f']_{B_1'}$, und als rechten unteren Block die Matrix ${}_{B_2''}[f'']_{B_1''}$ besitzt.