Musterlösung Serie 11

QUOTIENTENVEKTORRAUM, DETERMINANTE

1. Sei $U \subset V$ ein Unterraum, und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit $U \subset \operatorname{Kern}(f)$. Betrachte die von der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraums induzierte lineare Abbildung $\overline{f}\colon V/U \to W$. Zeige:

   (a) $\operatorname{Kern}(\overline{f}) = \operatorname{Kern}(f)/U$.

   (b) $\overline{f}$ ist injektiv genau dann, wenn $U = \operatorname{Kern}(f)$ ist.

   (c) $\overline{f}$ ist surjektiv genau dann, wenn f surjektiv ist.

   (d) Ist f surjektiv, so induziert f einen Isomorphismus $V/\operatorname{Kern}(f) \xrightarrow{\sim} W$.

   Lösung:

   (a) Für die Abbildung $\overline{f} : V/U \to W$ gilt $\overline{f}(x+U) = f(x)$ für alle $x \in V$. Es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(\overline{f}) &= \{v+U \mid v \in V \wedge \overline{f}(v+U) = 0\}\\ &= \{v+U \mid v \in V \wedge f(v) = 0\}\\ &= \{v+U \mid v \in \operatorname{Kern}(f)\}\\ &= \operatorname{Kern}(f)/U\end{aligned}$$

   (b) $\overline{f}$ ist injektiv $\iff$ $\operatorname{Kern}(\overline{f}) = 0 \overset{\text{(a)}}{\iff} \operatorname{Kern}(f)/U = 0 \iff \operatorname{Kern}(f) = U$.

   (c)

$$\begin{aligned}\operatorname{Bild}(f) &= \{w \in W \mid \exists v \in V\colon f(v) = w\}\\ &= \{w \in W \mid \exists v \in V\colon \overline{f}(v+U) = w\}\\ &= \{w \in W \mid \exists \bar{v} \in V/U\colon \overline{f}(\bar{v}) = w\}\\ &= \operatorname{Bild}(\overline{f})\,.\end{aligned}$$

   (d) Die induzierte Abbildung $\overline{f} : V/\operatorname{Kern}(f) \to W$ ist wegen (b) injektiv und wegen (c) surjektiv, also ein Isomorphismus.

2. Zeige: Für jeden Unterraum V' mit $U \subset V' \subset V$ ist V'/U ein Unterraum von V/U. Jeder Unterraum von V/U hat diese Gestalt.

   Lösung: Die Teilmenge $V'/U \subset V/U$ ist das Bild der zusammengesetzten linearen Abbildung $V' \to V \to V/U$, also ein Unterraum.

Sei umgekehrt $W \subset V/U$ ein beliebiger Unterraum. Sei $\pi : V \to V/U$ die Projektion und sei $V' := \pi^{-1}(W)$. Für jedes $u \in U$ gilt dann $\pi(u) = 0 \in W$ und somit $u \in V'$. Insbesondere ist $0 \in V'$ und V' nicht leer. Weiter gilt für alle $v, v' \in V'$ und $\lambda \in K$ sowohl $\pi(v + v') = \pi(v) + \pi(v')$ als auch $\pi(\lambda v) = \lambda\pi(v)$. Da W ein Unterraum ist und $\pi(v)$ und $\pi(v')$ in W liegen, liegen $\pi(v) + \pi(v')$ und $\lambda\pi(v)$ in W und somit $v + v'$ und λv in V'. Daher ist V' ein Unterraum mit $U \subset V' \subset V$. Aus der Surjektivität von π folgt nun

$$V'/U = \pi(V') = \pi(\pi^{-1}(W)) = W,$$

also ist W von der gewünschten Gestalt.

3. Für $i = 1, \ldots, n-1$ sei $\sigma_i \in S_n$ die Permutation, die i und $i+1$ vertauscht und alle übrigen Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ festlässt, genannt *Nachbartransposition*. Zeige, dass jedes Element von S_n ein Produkt von Nachbartranspositionen ist.

   Lösung: Wir verwenden Induktion über n. Da $S_1 = \{\mathrm{id}_{S_1}\}$ und id_{S_1} gleich dem leeren Produkt ist, gilt die Aussage für $n = 1$. Für $n \geqslant 2$ können wir annehmen, dass die Aussage für $n - 1$ gilt.

   Behauptung: Für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ bildet die Permutation $\sigma_i \cdots \sigma_{n-1} \in S_n$ die Ziffer n auf die Ziffer i ab.

   Beweis: Für $i = n$ ist diese Permutation die Identität und bildet n auf $i = n$ ab. Für $i < n$ können wir mit absteigender Induktion annehmen, dass $\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{n-1}$ die Ziffer n auf $i + 1$ abbildet. Da σ_i die Ziffer $i + 1$ auf i abbildet, folgt die entsprechende Aussage dann auch für i. $\square$

   Sei nun $\sigma \in S_n$ beliebig und setze $i := \sigma(n)$. Wegen $\sigma(n) = i = (\sigma_i \cdots \sigma_{n-1})(n)$ gilt für die Permutation
$$\tau := (\sigma_i \cdots \sigma_{n-1})^{-1}\sigma$$
   dann $\tau(n) = n$. Fassen wir τ als Element von S_{n-1} auf, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung, dass τ ein Produkt von Nachbartranspositionen ist. Somit gilt dasselbe auch für
$$\sigma = \sigma_i \cdots \sigma_{n-1}\tau.$$

4. Beweise die folgende Proposition aus der Zusammenfassung:

   Proposition: Für jede Blockdreiecksmatrix der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A' & B \\ \hline O & A'' \end{array}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\begin{array}{c|c} A' & O \\ \hline B' & A'' \end{array}\right)$$

   mit quadratischen Matrizen A' und A'' und der jeweiligen Nullmatrix O gilt

$$\det(A) = \det(A') \cdot \det(A'').$$

Lösung: Wegen $\det(A) = \det(A^T)$ genügt es, den zweiten Fall, also eine untere Blockdreiecksmatrix, zu behandeln.

Sei A der Grösse $n \times n$ und A' der Grösse $r \times r$. Schreibe X_{ij} für den Eintrag einer Matrix X an der Stelle (i,j). Weil A eine untere Blockdreiecksmatrix ist, ist $A_{ij} = 0$ für alle $j > r$ und $i \leqslant r$. In der Definition der Determinante

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}$$

ergeben also nur diejenigen Permutationen $\sigma \in S_n$ einen von Null verschiedenen Summanden, für die $\sigma(i) \leqslant r$ für alle $1 \leqslant i \leqslant r$ gilt.

Jedes solche σ induziert eine Abbildung $\sigma_1 \colon \{1,\ldots,r\} \to \{1,\ldots,r\}$. Da σ injektiv ist, ist auch σ_1 injektiv, und aus Kardinalitätsgründen ist σ_1 dann schon bijektiv. Da σ bijektiv ist, induziert es dann ausserdem eine bijektive Abbildung $\sigma_2 \colon \{r+1,\ldots,n\} \to \{r+1,\ldots,n\}$. Also ist σ_1 eine Permutation von $\{1,\ldots,r\}$ und σ_2 eine Permutation von $\{r+1,\ldots,n\}$. Offenbar ist σ durch σ_1 und σ_2 bestimmt, und jedes Paar (σ_1,σ_2) bestehend aus einer Permutation σ_1 von $\{1,\ldots,r\}$ und σ_2 von $\{r+1,\ldots,n\}$ tritt so auf. Ausserdem sind die Fehlstände von σ, das heisst die Paare (i,j) mit $1 \leqslant i < j \leqslant n$ mit $\sigma i > \sigma j$ genau die Fehlstände von σ_1 sowie die Fehlstände von σ_2; somit gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_2)$. Wenn wir also über alle genannten σ_1 und σ_2 summieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \\
&= \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \operatorname{sgn}(\sigma_2) \prod_{i=1}^{r} A_{i\sigma_1(i)} \prod_{i=r+1}^{n} A_{i\sigma_2(i)} \\
&= \left(\sum_{\sigma_1} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \prod_{i=1}^{r} A_{i\sigma_1(i)} \right) \cdot \left(\sum_{\sigma_2} \operatorname{sgn}(\sigma_2) \prod_{i=r+1}^{n} A_{i\sigma_2(i)} \right)
\end{aligned}$$

Da A' der linke obere $r \times r$-Block von A ist, ist der erste Faktor gleich

$$\sum_{\sigma_1 \in S_r} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \prod_{i=1}^{r} A'_{i\sigma_1(i)} \;=\; \det(A').$$

Da A'' der rechte untere $(n-r) \times (n-r)$-Block von A ist, ist der zweite Faktor (nach der Umnummerierung $\{1,\ldots,n-r\} \xrightarrow{\sim} \{r+1,\ldots,n\}$, $i \mapsto i+r$) gleich

$$\sum_{\sigma'_1 \in S_{n-r}} \operatorname{sgn}(\sigma'_1) \prod_{i=1}^{n-r} A''_{i\sigma'_1(i)} \;=\; \det(A'').$$

Insgesamt folgt daraus die gewünschte Aussage.

5. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Durch Anwenden des Gaussverfahrens erhält man

$$\begin{aligned} \det(A) &= -4 \\ \det(B) &= 0 \\ \det(C) &= 24. \end{aligned}$$

Alternativ kann man für B direkt erkennen, dass die erste Spalte eine Linearkombination der dritten und fünften Spalte ist und daher $\det(B) = 0$ ist.

6. Berechne in Abhängigkeit von a, b, c, d, e die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$$

Lösung: Durch Subtrahieren der letzten Zeile von allen anderen Zeilen in der gegebenen Matrix erhält man die Matrix

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & a-b & a-c & a-d & a-e \\ 0 & 0 & b-c & b-d & b-e \\ 0 & 0 & 0 & c-d & c-e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-e \\ a & b & c & d & e\,. \end{pmatrix}$$

Nun verschieben wir die unterste Zeile nach ganz oben, was eine zyklische Permutation aller Zeilen bedeutet. Diese zyklische Permutation von 5 Ziffern hat Signum $(-1)^{5-1} = 1$; also bewirkt sie keine Änderung der Determinante. Nach der Verschiebung entsteht eine obere Dreiecksmatrix A'', deren Determinante das Produkt der Diagonaleinträge ist. Insgesamt erhalten wir die Antwort

$$\det \begin{pmatrix} a & a & a & a & a \\ a & b & b & b & b \\ a & b & c & c & c \\ a & b & c & d & d \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix} \;=\; \det(A') \;=\; \det(A'') \;=\; a(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)\,.$$

7. Für a und b in einem Körper K und $n \geqslant 1$ betrachte die $(n \times n)$-Matrix

$$A_n \;:=\; \begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Beweise:

$$\det(A_n) = \big(b + (n-1)a\big) \cdot (b-a)^{n-1}.$$

Lösung: Durch Addieren der ersten $n-1$ Spalten zur letzten Spalte erhält man die Matrix

$$B_n \;:=\; \begin{pmatrix} b & a & \dots & a & b+(n-1)a \\ a & b & \ddots & a & b+(n-1)a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & \dots & a & b & b+(n-1)a \\ a & \dots & \dots & a & b+(n-1)a \end{pmatrix}.$$

Herausziehen des Faktors $(b + (n-1)a)$ in der letzten Spalte liefert die Matrix

$$C_n \;:=\; \begin{pmatrix} b & a & \dots & a & 1 \\ a & b & \ddots & a & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & \dots & a & b & 1 \\ a & \dots & \dots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Subtrahieren des a-fachen der letzten Spalte von allen anderen Spalten erhalten wir daraus die Matrix

$$D_n \;:=\; \begin{pmatrix} b-a & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & b-a & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & b-a & 1 \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da dies eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt

$$\begin{aligned}\det(A_n) &= \det(B_n)\\ &= (b+(n-1)a)\cdot\det(C_n)\\ &= (b+(n-1)a)\cdot\det(D_n)\\ &= (b+(n-1)a)\cdot(b-a)^{n-1}.\end{aligned}$$

Aliter: Sei B_n die $n\times n$ Matrix

$$B_n := \begin{pmatrix} a & a & a & \dots & a\\ a & b & a & \dots & a\\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots\\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a\\ a & a & \dots & a & b\end{pmatrix}.$$

Behauptung. $\det(B_n) = (b-a)^{n-1}a$.

Beweis. Wir verwenden Induktion. Wegen $B_1 = (a)$ gilt die Aussage für $n = 1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geqslant 1$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile von B_{n+1} erhält man die Matrix

$$B'_{n+1} := \begin{pmatrix} 0 & a-b & 0 & \dots & 0\\ a & b & a & \dots & a\\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots\\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a\\ a & a & \dots & a & b\end{pmatrix}$$

und durch Entwickeln von B'_{n+1} nach der ersten Zeile erhält man

$$\det(B_{n+1}) = \det(B'_{n+1}) = (b-a)\det(B_n) \overset{\text{IV}}{=} (b-a)^n a\,.$$

□

Behauptung. $\det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b+(n-1)a\big)$.

Beweis. Wir verwenden Induktion über n. Wegen $A_1 = (b)$ gilt die Aussage für $n = 1$. Angenommen, die Aussage gilt für ein $n \geqslant 1$. Durch Subtrahieren der zweiten von der ersten Zeile von A_{n+1} erhält man die Matrix

$$A'_{n+1} := \begin{pmatrix} b-a & a-b & 0 & \dots & 0\\ a & b & a & \dots & a\\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots\\ a & \vdots & \ddots & \ddots & a\\ a & a & \dots & a & b\end{pmatrix}$$

und durch Entwickeln von A'_{n+1} nach der ersten Zeile erhält man

$$\begin{aligned}\det(A_{n+1}) &= (b-a)\det(A_n) + (-1)(a-b)\det(B_n)\\ &\overset{\text{IV}}{=} (b-a)^n\big(b+(n-1)a\big) + (b-a)^n a\\ &= (b-a)^n(b+na).\end{aligned}$$

Die Aussage gilt also auch für den Fall $n+1$. □

*8. Die Zahlen 2014, 1484, 3710 und 6996 sind alle durch 106 teilbar. Zeige ohne zu rechnen, dass auch

$$\det\begin{pmatrix}2&0&1&4\\1&4&8&4\\3&7&1&0\\6&9&9&6\end{pmatrix}$$

durch 106 teilbar ist.

Lösung: Wir addieren (1000×(1. Spalte) + 100×(2. Spalte) + 10×(3. Spalte)) zur 4. Spalte. Wir ändern die Determinante dadurch nicht und erhalten:

$$\det\begin{pmatrix}2&0&1&4\\1&4&8&4\\3&7&1&0\\6&9&9&6\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2&0&1&2014\\1&4&8&1484\\3&7&1&3710\\6&9&9&6996\end{pmatrix}.$$

Da jeder Eintrag in der letzten Spalte durch 106 teilbar ist, gilt

$$\det\begin{pmatrix}2&0&1&2014\\1&4&8&1484\\3&7&1&3710\\6&9&9&6996\end{pmatrix} = 106\cdot\det\begin{pmatrix}2&0&1&a_1\\1&4&8&a_2\\3&7&1&a_3\\6&9&9&a_4\end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen $a_1,\dots,a_4$. Da die Determinante einer Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ wieder in $\mathbb{Z}$ liegt, folgt die Aussage. All dies kann man sich im Prinzip im Kopf überlegen.