Musterlösung Serie 12

Determinante, Ähnlichkeit und Polynome

1. Berechne die Determinante der 175×175-Matrix $C := (c_{kl})_{k,l=1,\ldots,175}$ mit

$$c_{kl} \ := \ \begin{cases} k^2+1 & \text{falls } k=l \\ kl & \text{falls } k\neq l \end{cases}.$$

Lösung: Sei $C' = (c'_{k\ell})$ die Matrix, die aus C entsteht, indem man für alle k,ℓ die k-te Zeile mit $1/k$ und die ℓ-te Spalte mit $1/\ell$ multipliziert. In Formeln gilt dann

$$c'_{k\ell} \ = \ \frac{1}{k\ell}c_{kl} \ = \ \begin{cases} 1+\frac{1}{k^2} & \text{falls } k=l \\ 1 & \text{falls } k\neq l, \end{cases}$$

oder auch

$$C' \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{4} & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & & 1+\frac{1}{175^2} \end{pmatrix}.$$

Da C' durch Zeilen- und Spaltenmultiplikation aus C entsteht, gilt

$$\det C = (175!)^2 \det C'\,.$$

Sei nun C'' die Matrix, die aus C' durch Subtraktion der ersten Spalte von allen anderen entsteht. Dann haben wir $\det C' = \det C''$ mit

$$C'' \ = \ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{9} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{175^2} \end{pmatrix}.$$

Durch Addition des j^2-fachen der j-ten Zeile zur ersten Zeile für alle $2\leqslant j\leqslant 175$ erhält man die untere Dreiecksmatrix

$$C''' \ = \ \begin{pmatrix} 2+\sum_{j=2}^{175} j^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{9} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{175^2} \end{pmatrix}.$$

mit Determinante

$$\det(C'''') \;=\; \left(2+\sum_{j=2}^{175} j^2\right)\cdot\left(\prod_{m=2}^{175}\frac{1}{m^2}\right) \;=\; \frac{1}{(175!)^2}\left(1+\sum_{j=1}^{175} j^2\right).$$

Insgesamt folgt

$$\det(C) \;=\; (175!)^2 \det C' \;=\; 1+\sum_{j=1}^{175} j^2\,.$$

Mit der bekannten Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;=\; \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \text{für alle } n \geqslant 1,$$

die man zum Beispiel mit Induktion beweist, schliessen wir

$$\det(C) \;=\; 1+\frac{175\cdot 176\cdot 351}{2} \;=\; 1801801\,.$$

*2. Seien x_i und y_i Elemente eines Körpers mit $x_i \neq y_j$ für alle i, j; und sei

$$F_n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \;:=\; \det\left(\left(\frac{1}{x_i-y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}\right)$$

(a) Beweisen Sie für alle $n \geqslant 1$ die Rekursionsformel

$$F_n(x_1,\ldots,y_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)(y_i-y_n)}{\prod_{i=1}^{n}(x_i-y_n)\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-y_i)}F_{n-1}(x_1,\ldots,y_{n-1}).$$

Hinweis: Subtrahieren Sie die letzte Spalte von jeder anderen Spalte. Subtrahieren Sie dann ein geeignetes Vielfache der letzten Zeile von jeder anderen Zeile.

(b) Leiten Sie daraus eine Formel für $F_n(x_1,\ldots,y_n)$ her.

(c) Zeigen Sie, dass mit $c_n := \prod_{i=1}^{n-1} i!$ gilt:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}\,.$$

Lösung:

(a) Sei $A := (a_{ij})$ mit $a_{ij} := 1/(x_i - y_j)$. Durch die erste Subtraktion im Hinweis, die die Determinante nicht ändert, wird der Matrixeintrag a_{ij} für $j < n$ zu

$$b_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j} - \frac{1}{x_i - y_n} = \frac{y_j - y_n}{(x_i - y_j)(x_i - y_n)},$$

während die Einträge in der letzten Spalten gleich bleiben: $b_{in} = 1/(x_i - y_n)$. Dann haben alle Einträge in der i-ten Zeile einen Faktor $1/(x_i - y_n)$ und alle Einträge in der j-ten Spalte mit $j < n$ einen Faktor $(y_j - y_n)$. Verwendet man die Linearität der Determinanten in den Zeilen und Spalten, so erhält man

$$\det A = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(y_j - y_n)}{\prod_{i=1}^{n}(x_i - y_n)} \det C\,,$$

mit

$$C = (c_{ij}) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} & 1 \\ \cdots & & & \\ \frac{1}{x_n - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_n - y_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Subtrahieren der letzten Zeile von allen anderen Zeilen wird der Eintrag c_{ij} für $i, j \leqslant n - 1$ zu

$$d_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j} - \frac{1}{x_n - y_j} = \frac{x_n - x_i}{(x_i - y_j)(x_n - y_j)}$$

und die letzte Spalte ist $(0, \ldots, 0, 1)^T$. Es folgt dann wie oben

$$\det C = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)}{\prod_{j=1}^{n-1}(x_n - y_j)} \det E$$

mit

$$E := \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1 - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_1 - y_{n-1}} & 0 \\ \cdots & & & \\ \frac{1}{x_{n-1} - y_1} & \cdots & \frac{1}{x_{n-1} - y_{n-1}} & 0 \\ * & \cdots & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det E = F_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}; y_1, \ldots, y_{n-1})$ folgt die Behauptung.

(b) Mit einem Induktionsbeweis folgt die *Cauchysche Determinantenformel*

$$\det\left(\frac{1}{x_i - y_j}\right) = \frac{\prod_{i<j}(x_j - x_i)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j}(x_i - y_j)}.$$

(c) Mit $x_i = i$ und $y_j = -j + 1$ spezialisiert sich die Matrix $(1/(x_i - y_j))_{ij}$ aus der Aufgabe (a) zu der Matrix $(h_{ij}) = (1/(i + j - 1))$. Sie heisst *Hilbert-Matrix.*

In diesem Fall lautet die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(n-i)(-i+n)}{\prod_{i=1}^{n}(i+n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(n+i-1)} F_{n-1} \\
&= \frac{(n-1)!^2}{n(n+1)\cdots(2n-1)n(n+1)\cdots(2n-2)} F_{n-1} \\
&= \frac{(n-1)!^4}{(2n-1)!(2n-2)!} F_{n-1}
\end{aligned}$$

Aus $F_1 = 1$ erhalten wir dann

$$F_n = \frac{(n-1)!^4(n-2)!^4\cdots 1!^4}{(2n-1)!(2n-2)!(2n-3)!(2n-4)!\cdots 2!1!} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}$$

3. Seien A, B quadratische Matrizen der gleichen Grösse. Zeige, wenn A und B ähnlich sind, dann gilt $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(B)$. Zeige auch, dass die umgekehrte Implikation nicht gilt.

   Lösung: Sind A und B ähnlich, so existiert eine invertierbare Matrix U mit $B = UAU^{-1}$. Für die jeweiligen Linksmultiplikationen gilt dann $L_B = L_{UAU^{-1}} = L_U \circ L_A \circ L_{U^{-1}}$ mit Isomorphismen L_U und $L_{U^{-1}}$. Daraus folgt

   $$\operatorname{Rang}(B) = \operatorname{Rang}(L_B) = \operatorname{Rang}(L_U \circ L_A \circ L_{U^{-1}}) \overset{(*)}{=} \operatorname{Rang}(L_A) = \operatorname{Rang}(A),$$

   wobei $(*)$ aus einer Proposition aus §5.8 der Zusammenfassung folgt.

   Um zu sehen, dass die umgekehrte Implikation nicht gilt, betrachten wir die beiden Matrizen $A := \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ vom Rang 2. Da die Einheitsmatrix A nur zu sich selbst ähnlich ist, erhalten wir ein Gegenbeispiel.

4. Betrachte $n \times n$-Matrizen A und B über K.

   (a) Zeige: Ist A oder B invertierbar, so sind AB und BA ähnlich.

   *(b) Gilt die Folgerung auch ohne die Bedingung in (a)?

   Lösung: (a) Für A invertierbar ist $AB = A(BA)A^{-1}$ ähnlich zu BA, und für B invertierbar ist $BA = B(AB)B^{-1}$ ähnlich zu AB.

   (b) Für $A := \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ gilt $AB = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ und $BA = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$. Aber jede zur Nullmatrix O ähnliche Matrix UOU^{-1} ist wieder die Nullmatrix. Darum ist AB nicht ähnlich zu BA in diesem Fall.

5. Sei $K[X]^{\leqslant n}$ der Raum der Polynome über einem Körper K vom Grad $\leqslant n$ und seien $x_1, \ldots, x_{n+1}$ paarweise verschiedene Elemente in K. Zeige, dass die Abbildung

   $$\Phi : K[X]^{\leqslant n} \to K^{n+1},\ P(X) \to \big(P(x_1), \ldots, P(x_{n+1})\big)$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Lösung: Wegen

$$\begin{aligned}
\Phi(P+Q) &= ((P+Q)(x_1),\ldots,(P+Q)(x_{n+1})) \\
&= (P(x_1)+Q(x_1),\ldots,P(x_{n+1})+Q(x_{n+1})) \\
&= (P(x_1),\ldots,P(x_{n+1}))+(Q(x_1),\ldots,Q(x_{n+1})) \\
&= \Phi(P)+\Phi(Q) \\
\Phi(\lambda P) &= (\lambda P(x_1),\ldots,\lambda P(x_{n+1})) = \lambda\Phi(P)
\end{aligned}$$

für beliebige $P,Q \in K[X]^{\leqslant n}$ und $\lambda \in K$ ist die Abbildung linear.

Sodann bilden die Monome $1, X, \ldots, X^n$ eine geordnete Basis B von $K[X]^{\leqslant n}$. Bezüglich dieser Basis und der Standardbasis E von K^{n+1} hat Φ die Darstellungsmatrix

$$_E[\Phi]_B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Deren Determinante ist die Vandermonde-Determinante $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j-x_i)$. Nach der Vorlesung ist diese ungleich Null für paarweise verschiedene $x_1,\ldots,x_{n+1}$. Also ist die Darstellungsmatrix invertierbar und deshalb Φ ein Isomorphismus.

Aliter: Wir zeigen direkt, dass Φ bijektiv ist. Für $(y_1,\ldots,y_{n+1}) \in K^{n+1}$ beliebig müssen wir also zeigen, dass genau ein Polynom $P \in K[x]^{\leqslant n}$ existiert mit $\Phi(P) = (y_1,\ldots,y_{n+1})$, also mit

$$P(x_i) = y_i \quad \text{für } i = 1,\ldots,n+1\,.$$

Für die Eindeutigkeit seien P_1 und P_2 zwei solche Polynome. Dann ist die Differenz $\Delta := P_1 - P_2$ ein Polynom von Grad $\leqslant n$, das an den $n+1$ verschiedenen Stellen $x_1,\ldots,x_{n+1}$ verschwindet. Da ein von Null verschiedenes Polynom vom Grad $\leqslant n$ höchstens n verschiedene Nullstellen hat, folgt daraus $\Delta = 0$ und somit $P_1 = P_2$.

Für die Existenz setzen wir

$$g_i(X) \;:=\; \prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n+1} \frac{X-x_j}{x_i-x_j}$$

für jedes $i = 1,\ldots,n+1$. Dies ist ein Polynom vom Grad $\leqslant n$ mit $g_i(x_j) = \delta_{ij}$ für alle $j = 1,\ldots,n+1$. Also ist

$$P(X) := \sum_{i=1}^{n+1} y_i g_i(X)$$

ein Polynom vom Grad $\leqslant n$ mit $P(x_i) = y_i$ für alle $i = 1,\ldots,n+1$, wie gewünscht.

Bemerkung: Diese Konstruktion heisst *Lagrange-Interpolation.*

6. (a) Betrachte ein Polynom $F(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ mit $a_n \neq 0$. Zeige: Für jede Nullstelle $\frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ von F mit teilerfremden $b, c \in \mathbb{Z}$ gilt $b|a_0$ und $c|a_n$.

   (b) Finde alle Nullstellen in $\mathbb{Q}$ des Polynoms $P(X) := 2X^3 + 9X^2 + 7X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$.

   Lösung: (a) Durch Einsetzen der Nullstelle erhalten wir

$$0 = F\left(\frac{b}{c}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{b}{c}\right)^i.$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit c^n und erhalten eine Gleichung in $\mathbb{Z}$:

$$0 = \sum_{i=0}^{n} a_i c^{n-i} b^i.$$

Wir subtrahieren den ersten Summanden und erhalten

$$-a_0 c^n = \sum_{i=1}^{n} a_i c^{n-i} b^i.$$

Alle Terme der Summe auf der rechten Seite sind durch b teilbar, also muss auch die linke Seite durch b teilbar sein. Weil b und c teilerfremd sind, folgt daraus $b|a_0$. Analog erhalten wir durch Subtraktion des letzten Summanden die Gleichung

$$-a_n b^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i c^{n-i} b^i.$$

Alle Terme der Summe auf der rechten Seite sind durch c teilbar, also muss auch die linke Seite durch c teilbar sein. Aus der Teilerfremdheit von c und b folgt nun wiederum $c|a_n$.

(b) Nach (a) haben alle Nullstellen in $\mathbb{Q}$ die Form $\frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ mit teilerfremden $b|6$ und $c|2$. Dabei können wir $c > 0$ annehmen. Durch Durchprobieren aller Möglichkeiten $b \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ und $c \in \{1, 2\}$ finden wir die Lösungen $\frac{1}{2}, -3, -2$.

7. Führe in jedem der folgenden Fälle die *Polynomdivision mit Rest* aus, das heisst, bestimme die eindeutigen Polynome Q, $R \in K[X]$ mit $\deg(R) < \deg(G)$ und $F = Q \cdot G + R$.

   (a) $F = X^5 + 1$ und $G = X^2 + 2$ über $K = \mathbb{Q}$.

   (b) $F = 2X^5 + X^4 - 4X^3 + 12X^2 + X + 1$ und $G = X^3 - 2X + 7$ über $K = \mathbb{Q}$.

   (c) $F = 2X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 1$ und $G = 2X^2 + 1$ über $K = \mathbb{F}_3$.

   Lösung:

(a)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad X^3 - 2X \\ \hline
X^2 + 2 & X^5 \qquad\qquad\quad + 1 \\
 & -X^5 - 2X^3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad -2X^3 \\
 & \qquad\;\; 2X^3 + 4X \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 4X + 1
\end{array}
$$

Resultat:

$$X^5 + 1 \;=\; (X^3 - 2X) \cdot (X^2 + 2) + (4X + 1)$$

(b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 2X^2 \;\; + X \\ \hline
X^3 - 2X + 7 & 2X^5 + X^4 - 4X^3 + 12X^2 \;\; + X + 1 \\
 & -2X^5 \qquad\; + 4X^3 - 14X^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\; X^4 \qquad\quad - 2X^2 \;\; + X \\
 & \qquad -X^4 \qquad\; + 2X^2 - 7X \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 6X + 1
\end{array}
$$

Resultat:

$$2X^5 + X^4 - 4X^3 + 12X^2 + X + 1 \;=\; (2X^2 + X) \cdot (X^3 - 2X + 7) + (-6X + 1)$$

(c)

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\quad X^2 + X + \tfrac{1}{2} \\ \hline
2X^2 + 1 & 2X^4 + 2X^3 + 2X^2 \qquad + 1 \\
 & -2X^4 \qquad\quad - X^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 2X^3 \;\; + X^2 \\
 & \quad -2X^3 \qquad\quad - X \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad X^2 - X \; + 1 \\
 & \qquad\qquad -X^2 \qquad - \tfrac{1}{2} \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad - X + \tfrac{1}{2}
\end{array}
$$

Wegen $\frac{1}{2} = 2^{-1} = 2$ in $K = \mathbb{F}_3$ erhalten wir das Resultat:

$$2X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 1 \;=\; (X^2 + X + 2) \cdot (2X^2 + 1) + (2X + 2)$$

8. Sei R ein kommutativer unitärer Ring. Zeige:

   (a) Ist R endlich, so existiert ein von Null verschiedenes Polynom $P \in R[X]$ mit $P(r) = 0$ für alle $r \in R$.

   *(b) Die umgekehrte Implikation gilt im Allgemeinen nicht, das heisst, es existiert ein unendlicher kommutativer unitärer Ring R und ein von Null verschiedenes Polynom $P \in R[X]$ mit $P(r) = 0$ für alle $r \in R$.

   (*Hinweis:* Für jeden $\mathbb{F}_2$-Vektorraum V versehe $R := \mathbb{F}_2 \oplus V$ mit der Multiplikation $(\alpha, v) \cdot (\beta, w) := (\alpha\beta, \alpha w + \beta v)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2$ und $v, w \in V$.)

Lösung: Für (a) betrachtet man einfach das Polynom $P(X) := \prod_{r\in R}(X-r)$. Weil R endlich ist, ist dieses wohldefiniert und normiert vom Grad $|R|$, also ungleich Null. Nach Konstruktion erfüllt es $P(r) = 0$ für jedes $r \in R$.

Für (b) verifiziert man zunächst, dass $R := \mathbb{F}_2 \oplus V$ mit der Vektorraumaddition und der angegebenen Multiplikation sowie dem Nullvektor und dem Einselement $(1,0)$ einen kommutativen unitären Ring bildet. Sodann rechnet man für jedes $(\alpha, v) \in R$

$$(\alpha, v)^2 \;=\; (\alpha^2, 2\alpha v) \;=\; (\alpha, 0)$$

wegen $\alpha^2 = \alpha$ und $2 = 0$ in $\mathbb{F}_2$. Somit ist

$$(\alpha, v)^2 - (\alpha, v) \;=\; (0, v)$$

und daher

$$\big((\alpha, v)^2 - (\alpha, v)\big)^2 \;=\; (0, v)^2 \;=\; (0, 0).$$

Dies bedeutet, dass das Polynom $P(X) := (X^2 - X)^2$ auf ganz R verschwindet. Dieses Polynom ist normiert und daher ungleich Null. Schliesslich gilt dies für jeden $\mathbb{F}_2$-Vektorraum V. Ist dieser unendlich-dimensional, so ist auch R unendlich, wie gewünscht.