Musterlösung Serie 14

Diagonalisierbarkeit, Triagonalisierbarkeit und Nilpotente Endomorphismen

1. (a) Seien A, B zwei $n \times n$-Matrizen, die kommutieren, das heisst, für welche gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Sei λ ein Eigenwert von B der geometrischen Multiplizität 1. Zeige, dass jeder Eigenvektor von B zum Eigenwert λ auch ein Eigenvektor von A ist.

(b) Sei P_σ die Permutationsmatrix zu der Permutation $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(n) = 1$ und $\sigma(i) = i + 1$ für alle $1 \leqslant i < n$. Sei A eine $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$ mit

$$P_\sigma A P_\sigma^{-1} = A.$$

Zeige, dass A diagonalisierbar ist.

(*Hinweis:* Untersuche die Eigenwerte von P_σ und wende (a) an.)

Lösung:

(a) Sei $v \in K^n$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ. Da der zugehörige Eigenraum $E_{\lambda,B}$ eindimensional ist, ist er dann schon von v erzeugt. Wegen

$$B(Av) = A(Bv) = A(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (Av)$$

ist aber auch Av ein Eigenvektor von B zum Eigenwert λ. Also gilt $Av \in \langle v \rangle$ und somit $Av = \lambda' v$ für ein $\lambda' \in K$. Damit ist v auch ein Eigenvektor von A.

(b) Das charakteristische Polynom von P_σ in $\mathbb{C}[X]$ ist

$$\mathrm{char}_{P_\sigma}(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega^k),$$

wobei $\omega := e^{2\pi i/n}$ ist. Über $\mathbb{C}$ hat P_σ daher n verschiedene Eigenwerte der arithmetischen Vielfachheit 1. Also sind auch die geometrischen Vielfachheiten gleich 1, und P_σ ist diagonalisierbar mit eindimensionalen Eigenräumen. Somit besitzt $\mathbb{C}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von P_σ. Nach (a) sind dies auch Eigenvektoren von A; somit ist auch A diagonalisierbar.

2. (a) Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und sei $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ mit f-invarianten Unterräumen V_i. Zeige, dass die arithmetische bzw. geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts $\lambda \in K$ von f gleich der Summe der arithmetischen bzw. geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert der Endomorphismen $f|V_i$ von V_i ist.

(b) Folgere, dass f diagonalisierbar ist genau dann, wenn $f|V_i$ diagonalisierbar ist für jedes i.

(c) Seien f und g Endomorphismen desselben endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass f und g *simultan diagonalisierbar* sind (das heisst, dass eine Basis aus simultanen Eigenvektoren für f und g existiert) genau dann, wenn sie miteinander kommutieren und separat diagonalisierbar sind.

Lösung:

(a) Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ wähle eine geordnete Basis B_i von V_i. In aufsteigender Reihenfolge zusammengesetzt ergeben diese eine geordnete Basis B von V. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich B ist dann die Blockdiagonalmatrix mit Diagonalblöcken ${}_{B_i}M_{B_i}(f|_{V_i})$ für $1 \leqslant i \leqslant r$. Das charakteristische Polynom von f ist deshalb das Produkt der charakteristischen Polynome von f_{V_i}; das heisst, es gilt

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{char}_f(X) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{char}_{f|_{V_i}}(X).$$

Für jedes $\lambda \in K$ ist daher die arithmetische Vielfachheit von λ als Eigenwert von f gleich der Summe über $1 \leqslant i \leqslant r$ der arithmetischen Vielfachheit von λ als Eigenwert von $f|_{V_i}$.

Sodann betrachte einen beliebigen Vektor $v = v_1 + \cdots + v_r$ mit allen $v_i \in V_i$. Dann gilt $f(v) = f(v_1) + \ldots + f(v_r)$ mit allen $f(v_i) \in V_i$. Da $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ eine direkte Summe ist, gilt die Gleichung

$$f(v_1) + \ldots + f(v_r) = f(v) = \lambda v = \lambda v_1 + \cdots + \lambda v_r$$

genau dann, wenn $f(v_i) = \lambda v_i$ ist für alle i. Also gilt

$$\mathrm{Eig}_\lambda(f) \;=\; \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Eig}_\lambda(f|_{V_i})$$

und somit

$$\dim \mathrm{Eig}_\lambda(f) \;=\; \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Eig}_\lambda(f|_{V_i}).$$

Daher ist die geometrische Vielfachheit von λ als Eigenwert von f die Summe über $1 \leqslant i \leqslant r$ der geometrischen Vielfachheiten von λ als Eigenwert von $f|_{V_i}$.

(b) Nach einem Satz der Vorlesung ist ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit mit der arithmetischen Vielfachheit übereinstimmt.

Aus der Formel (1) folgt, dass $\mathrm{char}_f(X)$ genau dann in Linearfaktoren zerfällt, wenn $\mathrm{char}_{f|_{V_i}}(X)$ in Linearfaktoren zerfällt für jedes i. Sodann betrachte ein beliebiges $\lambda \in K$. Dann folgt aus (a) sowie dem Umstand, dass die geometrische Vielfachheit stets $\leqslant$ der arithmetischen Vielfachheit ist, dass diese Vielfachheiten für f genau dann übereinstimmen, wenn sie für jedes $f|_{V_i}$ übereinstimmen. Also ist f genau dann diagonalisierbar, wenn jedes $f|_{V_i}$ diagonalisierbar ist.

(c) Angenommen f und g sind simultan diagonalisierbar. Dann sind f und g auch separat diagonalisierbar. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V bestehend aus simultanen Eigenvektoren für f und g zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respektive $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Für jedes Element $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned} f\left(g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right)\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i \lambda_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mu_i v_i = g\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i\right) = g\left(f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right)\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f und g kommutieren.

Umgekehrt nehmen wir an, dass f und g kommutieren und separat diagonalisierbar sind. Weil f diagonalisierbar ist, existieren Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von f mit $V = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$. Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ und $v \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$ gilt wegen der Kommutativität von f und g:

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda_i v) = \lambda_i g(v)$$

und daher ist $g(v) \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$. Die Eigenräume von f sind somit g-invariant. Weil g diagonalisierbar ist, ist also auch $g|_{\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)}$ diagonalisierbar für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ nach Teil (b). Daher existiert eine Basis B_i von $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$ aus Eigenvektoren von g. Zusammen ist damit $B := B_1 \cup \cdots \cup B_r$ eine Basis von V aus simultanen Eigenvektoren von f und g; daher sind f und g simultan diagonalisierbar.

3. Trigonalisiere die folgenden reellen Matrizen zu einer oberen Dreiecksmatrix:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: (A): Das charakteristische Polynom von A ist $\mathrm{char}_A(X) = (X-1)^3$, zerfällt also in Linearfaktoren; somit ist A trigonalisierbar. Wir betrachten die Matrix $C := A - I_3$, setzen

$$b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 := Cb_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_1 := Cb_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

und verifizieren zur Sicherheit $Cb_1 = 0$. Wir prüfen direkt, dass die Matrix $U := (b_1, b_2, b_3)$ invertierbar ist. Nach Konstruktion ist dann

$$U^{-1}CU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ also } U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(B): Das charakteristische Polynom der Matrix B berechnet sich zu $\mathrm{char}_B(X) = (X-1)(X+1)^2$. Wir bestimmen zuerst einen Eigenvektor v_1 zum Eigenwert 1 und einen Eigenvektor v_2 zum Eigenwert -1 und finden

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Jetzt nehmen wir irgendeinen dritten Vektor v_3, der v_1, v_2 zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt, also zum Beispiel

$$v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix $U := (v_1, v_2, v_3)$ hat dann $U^{-1}BU$ obere Dreiecksgestalt. Explizit ergibt sich

$$UBU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der Eintrag -1 ausserhalb der Diagonale von UBU^{-1} reflektiert den Umstand, dass -1 ein Eigenwert mit arithmetischer Multiplizität 2, aber geometrischer Multiplizität 1 ist, also B nicht diagonalisierbar ist. Man kann ihn also nicht durch eine andere Wahl von v_3 zu 0 machen. Den Eintrag 4 dagegen schon, indem man stattdessen

$$v_3 := \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

wählt. Durch welches Verfahren man ein solches v_3 effektiv findet, wird im Frühjahrssemester besprochen.

4. Bestimme die Jordansche Normalform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der folgenden reellen Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

A: Wir haben

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $A^k = 0$ für alle $k \geqslant 3$. Durch Rechnen und das Kriterium des Satzes im Kapitel 9.5 der Zusammenfassung findet man die Einträge der folgenden Tabelle.

k	1	2	3	4	$\cdots$
$\dim \mathrm{Kern}(A^k)$	2	4	5	5	$\cdots$
$\#\ k \times k$-Jordanblöcke	0	1	1	0	$\cdots$

Daraus folgt schon, dass die Jordan-Normalform von A aus einem Jordanblock der Grösse 3×3 und einem der Grösse 2×2 besteht.

Um die Übergangsmatrix zu bestimmen, wähle einen beliebigen Vektor $v_1 \in V \setminus \mathrm{Kern}(L_A^2)$, zum Beispiel sei

$$v_1 := (0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Av_1 &= (0, 0, -1, 2, 0)^T \\ A^2 v_1 &= (1, 2, 4, 0, 0)^T . \end{aligned}$$

Wähle nun ein beliebigen $v_2 \in \mathrm{Kern}(L_A^2) \setminus \langle \mathrm{Kern}(L_A), Av_1, A^2 v_1 \rangle$, zum Beispiel sei

$$v_2 := (0, 1, 0, 0, 0)^T.$$

Dann bilden die Vektoren $v_1, Av_1, A^2v_1, v_2, Av_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$ und für die Matrix

$$S := (A^2 v_1, Av_1, v_1, Av_2, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt nach Konstruktion

$$S^{-1} A S = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

B: Wir haben

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und $B^k = 0$ für alle $k \geqslant 4$. Mit Rechnen folgt

k	1	2	3	4	5	$\cdots$
$\dim \mathrm{Kern}(B^k)$	2	3	4	5	5	$\cdots$
$\#\ k \times k$-Jordanblöcke	1	0	0	1	0	$\cdots$

Daraus ersehen wir schon, dass die Jordan-Normalform von B aus einem Jordanblock der Grösse 4×4 und einem der Grösse 1×1 besteht.

Sei $v_1 \in \mathbb{R}^5 \setminus \mathrm{Kern}(L_B^3)$ ein beliebiges Element, zum Beispiel sei

$$v_1 := (0,0,0,0,1)^T.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Bv_1 &= (0,0,-1,2,0)^T \\ B^2v_1 &= (-1,2,4,0,0)^T \\ B^3v_1 &= (8,0,0,0,0)^T. \end{aligned}$$

Sei $v_2 \in \mathrm{Kern}(L_B) \setminus \langle B^3 v_1 \rangle$ ein beliebiges Element, zum Beispiel sei

$$v_2 := (0,1,-2,0,0)^T.$$

Dann bilden die Vektoren $v_1, Bv_1, \ldots, B^3v_1, v_2$ eine Basis von $\mathbb{R}^5$ und für die Matrix

$$S := (B^3v_1, B^2v_1, Bv_1, v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt nach Konstruktion

$$S^{-1}BS = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

5. Eine Matrix A heisst *nilpotent*, falls $A^p = O$ ist für ein $p \geqslant 1$. Seien A und B zwei nilpotente $n \times n$-Matrizen mit $AB = BA$. Zeige, dass $A + B$ und AB nilpotent sind.

   Lösung: Seien $p, q \geqslant 1$ mit $A^p = B^q = O$. Wegen $AB = BA$ gilt dann $(AB)^p = A^p B^p = OB^p = O$, also ist AB nilpotent. Wegen $AB = BA$ gilt weiter die binomische Formel

$$(A+B)^{p+q} \;=\; \sum_{k=0}^{p+q} \binom{n}{k} A^k B^{p+q-k}\,.$$

   Für alle $k \geqslant p$ ist hierbei $A^k B^{p+q-k} = A^p A^{k-p} B^{p+q-k} = OA^{k-p}B^{p+q-k} = O$, und für alle $k \leqslant p$ ist $A^k B^{p+q-k} = A^k B^{p-k} B^q = A^k B^{p-k} O = O$. Somit verschwinden in der obigen Summe alle Summanden und es folgt $(A+B)^{p+q} = O$. Die Matrix $A + B$ ist also nilpotent.

*6. Ein Endomorphismus der Form $\mathrm{id}_V + n$ für einen nilpotenten Endomorphismus n heisst *unipotent*. Analog für quadratische Matrizen. Sei $\mathbb{Q} \subset K$. Zeige:

   (a) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n ist

$$\exp(n) := {\sum_{m \geqslant 0}}' \frac{n^m}{m!}$$

   wohldefiniert und unipotent.

   (b) Für jeden unipotenten Endomorphismus u ist

$$\log(u) := {\sum_{k \geqslant 1}}' (-1)^{k-1} \frac{(u - \mathrm{id}_V)^k}{k}$$

   wohldefiniert und nilpotent.

   (c) Für jeden unipotenten Endomorphismus u gilt $\exp(\log(u)) = u$.

   (d) Für jeden nilpotenten Endomorphismus n gilt $\log(\exp(n)) = n$.

   Lösung:

   (a) Nach Voraussetzung existiert ein $p \geqslant 1$ mit $n^p = 0$. Dann gilt auch $n^m = 0$ für alle $m \geqslant p$. Somit ist die Summe in der Definition von $\exp(n)$ endlich. Der Ausdruck ist also wohldefiniert. Weiter ist

$$\exp(n) - \mathrm{id}_V = \sum_{m=1}^{p-1} \frac{n^m}{m!}\,.$$

   Da die Endomorphismen $n^m/m!$ für alle $1 \leqslant m \leqslant p$ nilpotent sind und miteinander kommutieren, folgt aus Aufgabe 5 und einem Induktionsargument, dass auch $\exp(n) - \mathrm{id}_V$ nilpotent ist. Der Endomorphismus $\exp(n)$ ist also unipotent.

(b) Nach Voraussetzung ist die Abbildung $n := u - \mathrm{id}_V$ nilpotent. Wie in (a) folgt daraus, dass die Summe in der Definition von $\log(u)$ endlich und folglich wohldefiniert ist. Da die Endomorphismen $\pm\frac{(u-\mathrm{id}_V)^k}{k}$ nilpotent sind und miteinander kommutieren, folgt aus Aufgabe 5 und Induktion, dass auch $\log(u)$ nilpotent ist.

(c) Die Exponentialfunktion hat die auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\exp(x) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{x^m}{m!},$$

und der Logarithmus die für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\log(1+x) = \sum_{k\geqslant 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt somit

$$\begin{aligned} 1 + x &= \exp(\log(1+x)) \\ &= \sum_{m\geqslant 0} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k\geqslant 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right)^m. \end{aligned} \tag{1}$$

Für jedes $p \geqslant 1$ betrachte das Polynom

$$F_p(X) := \sum_{0\leqslant m<p} \frac{1}{m!} \left(\sum_{1\leqslant k<p} (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k} \right)^m.$$

Für alle $k < p$ stimmt der Koeffizient von X^k mit dem Koeffizienten von X^k in der Taylorreihe von $\exp(\log(1+x))$ überein. Aus (1) und dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt also

$$F_p(X) = 1 + X + X^p G_p(X)$$

für ein Polynom $G_p(X) \in \mathbb{Q}[X]$.

Sei nun u ein beliebiger unipotenter Endomorphismus und $n := u - \mathrm{id}_V$ der zugehörige nilpotente Endomorphismus. Nach (b) ist dann auch $\log(u) = \log(\mathrm{id}_V + n)$ nilpotent. Wähle $p \geqslant 1$ mit $n^p = 0$ und $(\log(\mathrm{id}_V + n))^p = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \exp(\log(\mathrm{id}_V + n)) &= \sum_{0\leqslant m<p} \frac{1}{m!} \log(\mathrm{id}_V + n)^m \\ &= \sum_{0\leqslant m<p} \frac{1}{m!} \left(\sum_{1\leqslant k<p} (-1)^{k-1} \frac{n^k}{k} \right)^m \\ &= F_p(n) \\ &= 1 + n + n^p G_p(n) \\ &= 1 + n. \end{aligned}$$

(d) Die Aussage $\log(\exp(n)) = n$ für alle nilpotenten Endomorphismen n folgt mit dem analogen Argument aus der Entwicklung von $\log(\exp(x))$.