Musterlösung Wiederholungsserie

Wenn nichts anderes gesagt ist, sei K ein beliebiger Körper.

1. Ein Forscher besucht eine Insel, auf der, wie er weiss, zwei verschiedene Stämme Eingeborener wohnen: Die Angehörigen des einen Stammes sagen immer die Wahrheit, die Angehörigen des anderen Stammes lügen immer. Der Forscher will eine Schlucht auf der Insel erkunden, stösst aber auf dem Weg auf eine Gabelung, bei der er nicht weiss, ob er rechts oder links abbiegen soll, um zur Schlucht zu gelangen. Zum Glück kommt ihm ein Eingeborener entgegen, von dem er aber nicht weiss, welchem Stamm er angehört. Wie kann der Forscher mit nur einer einzigen Frage herausfinden, welche Richtung er einschlagen muss?

   Lösung: Der Forscher fragt den Eingeborenen:

   Welchen Weg würde ein Angehöriger des anderen Stammes mir empfehlen, um zur Schlucht zu gelangen?

   Angenommen, zur Schlucht geht es nach rechts.

   Falls der Eingeborene selber ein Lügner ist, weiss er, dass ein Angehöriger des anderen Stammes die Wahrheit, also „rechts“, sagen würde. Da er aber selber ein Lügner ist, sagt er „links“.

   Falls der Eingeborene selber ein Wahrheitler ist, weiss er, dass ein Angehöriger des anderen Stammes lügen würde, also „links“ sagen würde. Da er selber die Wahrheit sagt, sagt er auch „links“.

   Daher ist die Antwort sowieso „links“, und der Forscher kann beruhigt den rechten Weg einschlagen.

2. Prüfen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

   (a) Für alle $x \in \varnothing$ gilt $x \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$.
   (b) Für alle $x \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt $x \in \varnothing$.
   (c) Für alle $x \in \varnothing$ existiert ein $y \in \varnothing$ sodass $(x, y) \in \varnothing$.
   (d) Für alle $x \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ existiert ein $y \in \varnothing$ sodass $(x, y) \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$.
   (e) Für alle $x \in \varnothing$ und für alle $y \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt $\{x, y\} \not\subseteq \varnothing \cup \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$.

   Lösung:

   (a) Wahr, da $\varnothing$ keine Elemente enthält. Aus dem gleichen Grund ist $\varnothing$ eine Teilmenge von jeder Menge.

(b) Falsch. Die Menge $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ enthält zum Beispiel das Element 1, das nicht in $\varnothing$ liegt.

(c) Die Aussage ist wahr, da ein $x \in \varnothing$ nicht existiert.

(d) Falsch, da zwar ein $x \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$, aber kein $y \in \varnothing$ existiert.

(e) Wahr aus dem selben Grund wie (c).

3. Sei A eine $n \times n$ Matrix über K mit der Eigenschaft $AX = XA$ für alle $n \times n$-Matrizen X über K. Zeige, dass ein $\lambda \in K$ existiert mit $A = \lambda I_n$.

   Lösung: Die Matrix $A = (a_{ij})$ kommutiert insbesondere mit den Matrizen

$$E_{kl} = (\delta_{ki}\delta_{lj})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

   für alle $k, l = 1, \ldots, n$. Für den Eintrag an der Stelle (k, j) folgt

$$0 = (E_{kl}A - AE_{kl})_{kj} = \sum_{i=1}^{n}(E_{kl})_{ki}a_{ij} - a_{ki}(E_{kl})_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{li}a_{ij} - a_{ki}\delta_{ki}\delta_{lj} = a_{lj} - a_{kk}\delta_{lj}.$$

   Damit ist $a_{lj} = 0$ für alle $l \neq j$ und A also eine Diagonalmatrix. Für $l = j$ haben wir aber auch $a_{ll} = a_{kk}$, somit sind alle Diagonalelemente gleich und $A = \lambda I_n$ mit $\lambda := a_{11}$.

4. Die *Spur* einer $n \times n$-Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j}$ ist definiert als

$$\operatorname{Spur}(A) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   Zeige:

   (a) Für jede $m \times n$-Matrix A und jede $n \times m$-Matrix B gilt $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$.

   (b) Für jede invertierbare $n \times n$-Matrix U gilt $\operatorname{Spur}(UAU^{-1}) = \operatorname{Spur}(A)$.

   (c) Finde ein Gegenbeispiel zu der Aussage

$$\operatorname{Spur}(ABC) = \operatorname{Spur}(ACB).$$

   Lösung:

   (a) Die Aussage folgt durch direktes Nachrechnen aus der Definition.

   (b) Es gilt

$$\operatorname{Spur}(UAU^{-1}) = \operatorname{Spur}(U \cdot (AU^{-1})) \overset{(a)}{=} \operatorname{Spur}((AU^{-1}) \cdot U) = \operatorname{Spur}(A)\,.$$

   Aliter: Sei $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ das charakteristische Polynom von A. Wir berechnen den Koeffizient von X^{n-1} in P_A:

Da Einträge mit X in der Matrix $XI_n - A$ nur auf der Diagonalen stehen und eine Permutation $\sigma \in S_n$ mit $n-1$ Fixpunkten gleich der Identität ist, folgt aus der Formel

$$\det(XI_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)(XI_n - A)_{1\sigma(1)} \dots (XI_n - A)_{n\sigma}$$

dass der Koeffizient von X^{n-1} in P_A gleich dem Koeffizienten von X^{n-1} in

$$(X - a_{11}) \cdot \ldots \cdot (X - a_{nn})$$

und damit gleich $-\sum_{i=1}^n a_{ii} = -\operatorname{Spur}(A)$ ist. Da das charakteristische Polynom invariant unter Konjugation ist (also $P_{U^{-1}AU}(X) = P_A(X)$ ist für alle invertierbaren Matrizen U), gilt dasselbe auch für die Spur.

(c) Für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\operatorname{Spur}(ABC) = \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

und

$$\operatorname{Spur}(ACB) = \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

5. Berechne die LR-Zerlegung der Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir haben

$$M = P \cdot L \cdot U,$$

wobei

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{3}{29} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & \frac{29}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

6. Zeigen Sie, dass die Menge

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

zusammen mit der Addition und Multiplikation von Matrizen sowie dem Nullelement $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und dem Einselement $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ein nichtkommutativer Schiefkörper ist.

(Dieser ist isomorph zu dem Ring der *Hamiltonschen Quaternionen.*)

Lösung: Betrachte beliebige Elemente $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} u & -v \\ \overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}$ von H. Dann gilt

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a+u & -(b+v) \\ \overline{b+v} & \overline{a+u} \end{pmatrix}, \\ A \cdot B &= \begin{pmatrix} au - b\overline{v} & -av - b\overline{u} \\ u\overline{b} + \overline{av} & -\overline{b}v + \overline{au} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au - b\overline{v} & -(av + b\overline{u}) \\ \overline{(av + b\overline{u})} & \overline{(au - b\overline{v})} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere liegen $A+B$ und $A \cdot B$ in H. Also ist die Menge H unter Addition und Multiplikation abgeschlossen. Ausserdem liegen die Nullmatrix und die Einheitsmatrix beide in H. Somit folgen alle Axiome eines Schiefkörpers, mit Ausnahme der Existenz von additiven und multiplikativen Inversen, direkt aus den Grundeigenschaften von 2×2-Matrizen.

Sodann liegt auch

$$-A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -\overline{b} & -\overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ \overline{-b} & \overline{-a} \end{pmatrix}$$

wieder in H. Wegen $A + (-A) = 0$ zeigt dies die Existenz der additiven Inversen.

Ist A von der Nullmatrix verschieden, so ist mindestens eine der beiden komplexen Zahlen a, b ungleich Null. Somit ist $\det(A) = a\overline{a} + b\overline{b} = |a|^2 + |b|^2 > 0$ und A invertierbar. Ihre Inverse berechnet sich zu

$$C := \frac{1}{a\overline{a} + b\overline{b}} \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix}$$

und liegt wieder in H. (Die Gleichung $C \cdot A = A \cdot C = I_2$ kann man auch schnell direkt verifizieren). Das zeigt die Existenz aller multiplikativen Inversen. Wir folgern, dass H ein Schiefkörper ist.

Schliesslich zeigt die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dass das Kommutativgesetz in H nicht erfüllt ist.

7. Seien n und m natürliche Zahlen und A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeige, dass Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ linear unabhängig sind genau dann, wenn $Av_1, \ldots, Av_m$ linear unabhängig sind.

   Lösung: Sind $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig, so existiert eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i v_i = 0$ mit $a_1, \ldots, a_m \in K$. Multiplikation mit A liefert dann eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i A v_i = A \cdot (\sum_{i=1}^m a_i v_i) = A \cdot 0 = 0$. Also sind auch $Av_1, \ldots, Av_n$ linear abhängig.

   Sind umgekehrt $Av_1, \ldots, Av_m$ linear abhängig, so existiert eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i A v_i = 0$ mit $a_1, \ldots, a_m \in K$. Multiplikation mit A^{-1} liefert dann eine nicht-triviale Linearkombination $\sum_{i=1}^m a_i v_i = A^{-1} \cdot A \cdot (\sum_{i=1}^m a_i v_i) = A^{-1} \cdot (\sum_{i=1}^m a_i A v_i) = A^{-1} \cdot 0 = 0$. Also sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

8. Prüfe, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Lösung: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_4$ sind linear unabhängig genau dann, wenn das homogene lineare Gleichungssystem $x_1 v_1 + \ldots + x_4 v_4$ nur die triviale Lösung $x_1 = \ldots = x_4 = 0$ hat. Durch Anwenden des Gaussverfahrens oder direktes Ausprobieren erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Das zeigt, dass die Vektoren linear abhängig sind.

9. Beweise oder widerlege: Für beliebige linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eines Vektorraumes V und einen beliebigen Vektor $w \in V$ sind die Vektoren $v_1 + w, \ldots, v_n + w$ linear abhängig genau dann, wenn $w \in \langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$ ist.

   Lösung: Sind $v_1 + w, ..., v_n + w$ linear abhängig, so gibt es Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, nicht alle verschwindend, mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i + w) = 0$. Es gilt also

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \left(- \sum_i \lambda_i \right) w \,.$$

   Falls $c := - \sum_i \lambda_i = 0$ ist, folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, dass $\lambda_i = 0$ ist für alle i, im Widerspruch zur Annahme. Also ist $c \neq 0$ und damit $w = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{c} v_i$ ein Element von $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

Die Umkehrung ist falsch im Allgemeinen: Seien $n = 1$ und $w = v_1$ und V ein Vektorraum über einem Körper, in dem 2 invertierbar ist. Dann ist $v_1 + w = 2v_1$ linear unabhängig, aber $w = v_1$ liegt in $\langle v_1 \rangle$ im Widerspruch zur Aussage der Aufgabe.

10. Seien U, V zwei 5-dimensionale Untervektorräume von K^9. Zeige, dass $U \cap V \neq \{0\}$ ist.

    Lösung: Einerseits gilt

    $$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

    Andererseits gilt $U + V \subset K^9$ und daher $\dim(U + V) \leqslant 9$. Zusammen folgt daraus

    $$\dim(U \cap V) \;=\; \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) \;\geqslant\; 5 + 5 - 9 \;=\; 1.$$

    Daher ist $U \cap V \neq \{0\}$.

11. Für welche natürlichen Zahlen m existiert ein K-Vektorraum V mit m verschiedenen Unterräumen $V_1, \ldots, V_m$, so dass für alle $i < j$ der Unterraum V_i ein Komplement von V_j ist?

    Lösung: Für ein beliebiges $m \geqslant 0$ sei $V := \mathbb{Q}^2$ und

    $$V_i := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle$$

    für $i = 1, \ldots, m$. Dann ist $V_i \cap V_j = 0$ und die Unterräume V_i und V_j sind komplementär zueinander für alle $i < j$.

12. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Folgen:

    $$V := \big\{(x_i)_{i \geqslant 1} \;\big|\; x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } i \geqslant 1\big\}.$$

    Sei P_1 die Menge aller schliesslich polynomialen Folgen, das heisst, sei

    $$P_1 := \big\{(x_i)_{i \geqslant 1} \in V \;\big|\; \exists N \geqslant 1,\ \exists \text{ Polynom } P(x) \text{ sodass } \forall i \geqslant N : x_i = P(i)\big\},$$

    und sei P_2 die Menge aller periodischen Folgen, das heisst, sei

    $$P_2 := \big\{(x_i)_{i \geqslant 1} \in V \;\big|\; \exists m \geqslant 1 \text{ sodass } \forall i \geqslant 1 : x_{i+m} = x_i\big\}.$$

    Zeige, dass P_1 und P_2 Untervektorräume von V sind.

    Lösung: Wir zeigen dass P_1 ein Untervektorraum ist. Die Menge P_1 enthält die Nullfolge, das heisst die Folge $(x_i)_{i \geqslant 1}$ mit $x_i = 0$ für alle i; insbesondere ist P_1 nicht leer. Seien weiter $x = (x_i)_{i \geqslant 1}$ und $y = (y_i)_{i \geqslant 1}$ zwei beliebige Elemente in P_1

und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $N_x \geqslant 1$ und $N_y \geqslant 1$ und Polynome $P_x, P_y \in \mathbb{R}[x]$, sodass $x_i = P_x(i)$ ist für alle $i \geqslant N_x$ und $y_i = P_y(i)$ für alle $i \geqslant N_y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_i + y_i &= P_x(i) + P_y(i) && \text{für alle } i \geqslant \max\{N_x, N_y\} \\ \lambda x_i &= (\lambda P_x)(i) && \text{für alle } i \geqslant N_x. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $x + y = (x_i + y_i)_{i\geqslant 1}$ (mit Polynom $P_x + P_y$) und $\lambda x = (\lambda x_i)_{i\geqslant 1}$ (mit Polynom λP_x) wieder in P_1 liegen. Also ist P_1 ein Untervektorraum.

Wir zeigen nun, dass P_2 ein Untervektorraum ist. Die Nullfolge liegt in P_2, insbesondere ist P_2 nicht leer. Für beliebige Elemente $x = (x_i)_{i\geqslant 1}$ und $y = (y_i)_{i\geqslant 1}$ in P_2, wähle $a \geqslant 1$ und $b \geqslant 1$, sodass $x_{i+a} = x_i$ und $y_{i+b} = y_i$ ist für alle $i \geqslant 1$. Durch vollständige Induktion folgt $x_{i+ka} = x_i$ und $y_{i+kb} = y_i$ für alle $i, k \geqslant 1$. Mit $m := a \cdot b$ gilt deshalb

$$x_{i+m} + y_{i+m} = x_{i+b\cdot a} + y_{i+a\cdot b} = x_i + y_i.$$

Das zeigt, dass die Summe $x + y$ periodische Folgenglieder hat, also in P_2 liegt. Für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda x_{i+a} = \lambda x_i$ für alle $i \geqslant 1$, insbesondere also $\lambda x \in P_2$. Aus allem zusammen folgt, dass P_2 ein Untervektorraum ist.

13. Schreibe die lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^5$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

als Linksmultiplikation mit einer Matrix und finde je eine Basis ihres Kerns und ihres Bildes.

Lösung: Die Abbildung f ist gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Gaussverfahren bestimmen wir eine Basis für den Kern von f:

$$\mathrm{Kern}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

sowie eine Basis für das Bild von f:

$$\mathrm{Bild}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

14. Gegeben seien Elemente $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in K$. Welchen Rang kann die $n \times m$ Matrix $A := (a_i b_j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ haben?

Lösung: Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix} .$$

Sind alle $a_i = 0$, oder alle $b_j = 0$, so ist auch $A = 0$ und $\mathrm{Rang}(A) = 0$. Andernfalls ist jede Spalte ein skalares Vielfaches desselben von Null verschiedenen Vektors, und mindestens eine Spalte ist ungleich Null, also ist der Spaltenrang 1 und daher $\mathrm{Rang}(A) = 1$.

Aliter: Da der Rang jeder $n \times 1$ und jeder $1 \times m$-Matrix kleiner gleich 1 ist, folgt aus Serie 10 Aufgabe 2, dass $\mathrm{Rang}(A) \leqslant 1$ ist. Der Rest folgt wie oben.

15. Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$, beziehungsweise über $\mathbb{F}_2$.

Lösung: Über $\mathbb{R}$ ist der Rang gleich 3, zum Beispiel weil die Determinante gleich -2 ist. Über $\mathbb{F}_2$ ist der Rang gleich 2, weil je zwei Spalten linear unabhängig sind, aber die Summe aller Spalten gleich Null ist.

16. Gegeben seien die beiden geordneten Basen $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_4)$ und $\mathcal{B}' := (w_1, \ldots, w_4)$ von $\mathbb{Q}^4$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_4 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechne die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}$.

Lösung: Mit der Standardbasis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ gilt ${}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und ${}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$. Mit der Formel

$$ {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}'}^{-1} \cdot {}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} $$

folgt daraus

$$ {}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{6}{5} & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{11}{5} \end{pmatrix}. $$

17. Gegeben sei eine reelle $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit

(i) $|a_{ii}| \geqslant 1$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, und

(ii) $|a_{ij}| < \dfrac{1}{n-1}$ für alle $i \neq j$.

Zeige, dass A invertierbar ist.

Lösung: Angenommen es existiert ein Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ mit

$$ Ax = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)_{i=1,\dots,n} = 0\,. $$

Wegen $a_{ii} \neq 0$, gilt dann

$$ x_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j $$

und somit auch

$$ |x_i| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} |x_j| \tag{1} $$

für alle $i = 1, \dots, n$. Da es ein k gibt mit $x_k \neq 0$, folgt aus (1) und $|a_{ij}| < 1/(n-1)$ für alle $i \neq j$ und $a_{ii} \geqslant 1$ für alle i die *strikte* Ungleichung

$$ |x_i| < \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |x_j| $$

und damit auch

$$n|x_i| < \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

für alle i. Durch Aufsummieren erhält man

$$n \sum_{i=1}^{n} |x_i| < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_j| = n \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

was ein Widerspruch ist. Damit kann kein solches x existieren und A ist invertierbar.

18. Berechne eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $\mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$, die durch Linksmultiplikation mit der folgenden Matrix definiert ist:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Eine Basis des Kerns ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und eine Basis des Bildes ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

19. Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : V \to W$. Zeige, dass f injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist genau dann, wenn die duale lineare Abbildung $f^\vee : W^\vee \to V^\vee$ surjektiv bzw. injektiv bzw. bijektiv ist.

Lösung: Wenn $f : V \to W$ injektiv ist gibt es nach Serie 9, Aufgabe 4 eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$. Durch Dualisieren erhalten wir

$$f^\vee \circ g^\vee = \mathrm{id}_V^\vee = \mathrm{id}_{V^\vee},$$

woraus folgt, dass $f^\vee$ surjektiv ist.

Umgekehrt sei angenommen, dass $f^\vee$ surjektiv ist und sei $v \in V$ ein beliebiger nicht-verschwindender Vektor. Dann existiert ein $\lambda \in V^\vee$ mit $\lambda(v) \neq 0$, und wegen der Surjektivität zudem ein $\mu \in W^\vee$ mit $f^\vee(\mu) = \lambda$. Es folgt $\mu(f(v)) = f^\vee(\mu)(v) = \lambda(v) \neq 0$, also $f(v) \neq 0$. Also ist f injektiv.

Wenn $f : V \to W$ surjektiv ist, gibt es eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$. Wegen

$$g^\vee \circ f^\vee = \mathrm{id}_W^\vee = \mathrm{id}_{W^\vee}$$

ist notwendigerweise $f^\vee$ injektiv.

Wenn $f : V \to W$ nicht surjektiv ist, wähle ein Unterraum $U \subset W$ mit $W = \mathrm{Bild}(f) \oplus U$. Sei $p : W \to U$ die zugehörige Projektionsabbildung. Für ein beliebiges nicht-verschwindendes Element $\mu_U \in U^\vee$, definiert die Komposition

$$\mu : W = \mathrm{Bild}(f) \oplus U \xrightarrow{p} U \xrightarrow{\mu_U} K$$

ein Element in $W^\vee$. Nach Konstruktion ist $\mu \neq 0$ und verschwindet auf $\mathrm{Bild}(f)$. Für alle $v \in V$ gilt also $\mu(f(v)) = f^\vee(\mu)(v) = 0$ und folglich $f^\vee(\mu) = 0$. Die Abbildung $f^\vee$ ist also nicht injektiv.

Die Äquivalenz für die Bedingung „bijektiv" folgt aus denen für „injektiv" und „surjektiv".

20. Berechne die Determinante und, wenn möglich, die Inverse folgender Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 5 & 5 & 15 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) $\det A_1 = 12$ und $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(b) $\det A_2 = 2$ und $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\det A_3 = 12$ und $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$

(d) $\det A_4 = 4$ und $A_4^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

(e) $\det A_5 = 0$.

(f) $\det A_6 = 0$.

21. Berechne
$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, 2^{a(\sigma)}\,,$$
wobei $a(\sigma)$ die Anzahl der Fixpunkte von σ bezeichnet:
$$a(\sigma) = \#\big\{k \in \{1,\dots,n\} \bigm| \sigma(k) = k\big\}.$$
(*Hinweis:* Die Summe ist die Determinante einer gewissen $n{\times}n$-Matrix.)

Lösung: Für $n \geqslant 0$ gilt
$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, 2^{a(\sigma)} = \det\Big((1+\delta_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big) = n+1\,,$$
wobei man die Determinante mit Zeilen- oder Spaltenoperationen berechnet.

22. Zeige: Für jede $m \times n$ Matrix A und für jede $n \times m$ Matrix B gilt:
$$\det(I_m + A\cdot B) \;=\; \det(I_n + B\cdot A).$$
(*Hinweis:* Zerlege die $(m{+}n)\times(m{+}n)$-Blockmatrix $M := \begin{pmatrix} I_m & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ als Produkt $M = M_1\cdot M_2$ von Blockdreiecksmatrizen M_1, M_2 auf zwei verschiedene Arten und berechne die Determinante.)

Lösung: Wegen
$$M = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n + BA \end{pmatrix}$$
gilt
$$\det M = \det(I_n + BA),$$
und wegen
$$M = \begin{pmatrix} I_m + AB & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}$$
gilt
$$\det M = \det(I_m + AB)\,.$$
Durch Vergleichen erhält man die Aussage der Aufgabe.

23. Sei K ein Körper, welcher ein Element $a \in K$ mit $a^3 = 1$ und $a \neq 1$, enthält. Zeige, dass die Matrizen
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

ähnlich sind.

Lösung: Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$X^3 - 1 = (X-1)(X-a)(X-a^2)$$

und daher die paarweise verschiedenen Eigenwerte $1, a, a^2$ der jeweiligen Vielfachheit 1. Sie ist daher diagonalisierbar, also ähnlich zu der Diagonalmatrix

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Wer es genauer wissen will, bestimmt die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$ zu den jeweiligen Eigenwerten $1, a, a^2$; mit der invertierbaren Matrix

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}$$

gilt dann $A = UDU^{-1}$.

24. Entscheide, welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ ähnlich sind:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_7 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Zur Vorbereitung betrachte ein beliebiges $n \geqslant 0$ und eine beliebige invertierbare $n \times n$-Matrix U. Dann gilt erstens $U \cdot I_n \cdot U^{-1} = I_n$; also ist die Einheitsmatrix I_n nur zu sich selbst ähnlich. Zweitens seien A eine $n \times n$-Matrix und $B := UAU^{-1}$, also B ähnlich zu A. Dann gilt

$$B^2 = (UAU^{-1})(UAU^{-1}) = U(A^2)U^{-1};$$

also ist B^2 ähnlich zu A^2. Drittens sei $v \in K^n$ ein von Null verschiedener Vektor mit $Av = v$. Dann ist $w := Uv$ ein von Null verschiedener Vektor mit $Bw = (UAU^{-1})(Uv) = UAv = Uv = w$. Die Existenz eines von Null verschiedenen Vektors mit $Av = v$ ist also invariant unter Ähnlichkeit.

Insbesondere ist A_5 zu keiner anderen Matrix A_i ähnlich. Sodann sieht man durch Konjugieren mit der Vertauschungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dass A_1 ähnlich zu A_4, und A_2

ähnlich zu A_3 ist. Weiter sind A_2^2 und A_3^2 und A_7^2 gleich der Nullmatrix, die übrigen A_i^2 aber nicht. Wegen $\mathrm{Kern}(L_{A_7}) = \langle\binom{1}{1}\rangle$ probieren wir Konjugation von A_7 mit der Matrix $U := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, und erhalten

$$U^{-1}A_7U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3\,.$$

Also sind A_3 und A_7 zueinander ähnlich. Wegen $\mathrm{Kern}(L_{A_6}) = \langle\binom{-1}{1}\rangle$ probieren wir Konjugation von A_6 mit der Matrix $V := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, und erhalten

$$V^{-1}A_6V = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_8\,.$$

Also ist A_6 ähnlich zu A_8. Schliesslich existiert ein von Null verschiedener Vektor $v := \binom{1}{0}$ mit $A_1v = v$, aber kein von Null verschiedener Vektor $w \in K^2$ mit $A_8w = w$. Also sind A_1 und A_8 nicht ähnlich. Da Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist, folgt insgesamt, dass A_2, A_3 und A_7, beziehungsweise A_1 und A_4, beziehungsweise A_6 und A_8 ähnlich sind, aber keine weiteren Ähnlichkeiten der A_i existieren.

25. Sei A eine quadratische Matrix. Zeige, dass A und A^T dieselben Eigenwerte mit denselben arithmetischen und geometrischen Vielfachheiten besitzen.

Lösung: Sei n die Anzahl Spalten von A. Wegen

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det\left((\lambda I_n - A)^T\right) = \det\left(\lambda I_n - A^T\right) = P_{A^T}(\lambda),$$

haben A und A^T dasselbe charakteristische Polynom und damit dieselben Eigenwerte mit denselben arithmetischen Vielfachheiten.

Lemma. Für jede $n \times n$-Matrix B gilt $\dim\mathrm{Kern}(L_B) = \dim\mathrm{Kern}(L_{B^T})$.

Beweis des Lemma. Wegen $\mathrm{Rang}(B) = \mathrm{Rang}(B^T)$ gilt

$$\begin{aligned} \dim\mathrm{Kern}(L_B) &= n - \dim\mathrm{Bild}(L_B) \\ &= n - \mathrm{Rang}(B) \\ &= n - \mathrm{Rang}(B^T) \\ &= n - \dim\mathrm{Bild}(L_{B^T}) \\ &= \dim\mathrm{Kern}(L_{B^T})\,.\square \end{aligned}$$

Für jeden Eigenwert λ von A gilt wegen des Lemmas

$$\dim\mathrm{Kern}(\lambda I_n - A) = \dim\mathrm{Kern}\left((\lambda I_n - A)^T\right) = \dim\mathrm{Kern}(\lambda I_n - A^T).$$

Damit stimmen auch die geometrischen Vielfachheiten überein.

26. Seien Folgen $(a_i)_{i\geqslant 0}, (b_i)_{i\geqslant 0}, (c_i)_{i\geqslant 0}$ in $\mathbb{Q}$ definiert durch die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} a_{i+1} &:= a_i - 3b_i + 3c_i, \\ b_{i+1} &:= -2a_i + 2c_i, \\ c_{i+1} &:= a_i - b_i + 3c_i \end{aligned}$$

für alle $i \geqslant 0$, und die Anfangsbedingungen

$$a_0 := 1, \quad b_0 := 2 \quad \text{und} \quad c_0 := 1\,.$$

Bestimme explizite Lösungsformeln für a_i, b_i, c_i.

Lösung: Wir schreiben die Rekursionsgleichung in Matrixschreibweise als $v_{i+1} = Av_i$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad v_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_i := \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$$

für alle $i \geqslant 0$ ist. Die Matrix A hat die einfachen Eigenwerte $-2, 4, 2$ und ist daher diagonalisierbar, und zwar ist $A = VDV^{-1}$ mit

$$V := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$v_i = A^i v_0 = VD^iV^{-1}v_0 = \begin{pmatrix} (-2)^i \\ (-2)^i + 2^i \\ 2^i \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} a_i &= (-2)^i \\ b_i &= (-2)^i + 2^i \\ c_i &= 2^i \end{aligned}$$

für alle $i \geqslant 0$.

*27. Ein *stochastischer Vektor* ist ein Spaltenvektor mit Einträgen in $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ und Summe aller Einträge 1. Eine *stochastische* oder *Markov-Matrix* ist eine quadratische Matrix, deren Spalten stochastische Vektoren sind. Sei A eine stochastische $n \times n$-Matrix mit $n > 0$. Zeige:

(a) Für jeden stochastischen Vektor v ist auch Av ein stochastischer Vektor.

(b) Jeder komplexe Eigenwert λ von A hat Absolutbetrag $|\lambda| \leqslant 1$.

(c) Die Zahl 1 ist ein Eigenwert von A.

Seien nun alle Einträge von A positiv. Zeige:

(d) Der Eigenwert 1 hat geometrische Multiplizität 1.

(e) Der Eigenwert 1 hat arithmetische Multiplizität 1.

(f) Alle komplexen Eigenwerte $\lambda \neq 1$ haben Absolutbetrag $|\lambda| < 1$.

(g) Es existiert genau ein stochastischer Vektor v_1 mit $Av_1 = v_1$.

(h) Für jeden stochastischen Vektor v gilt $A^m v \to v_1$ für $m \to \infty$.

(*Hinweis:* Für (e) und (h) nehme vorläufig an, dass A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist. Beweise den allgemeinen Fall, nachdem die Jordan-Normalform behandelt wurde.)

Lösung: Schreibe $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ mit $a_{ij} \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

(a) Sei $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ ein stochastischer Vektor. Da alle Einträge von A und v nicht-negativ sind, gilt dasselbe für Av. Die Summe aller Einträge von Av ist dann

$$\sum_{i=1}^{n} (Av)_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j = 1.$$

Also ist auch Av ein stochastischer Vektor.

(b) Sei $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ ein komplexer Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\lambda v_i = (Av)_i = \sum_j a_{ij} v_j \tag{2}$$

und damit

$$|\lambda| \cdot |v_i| \leqslant \sum_j a_{ij} |v_j| \tag{3}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$. Durch Aufsummieren über i folgt

$$|\lambda| \sum_i |v_i| \leqslant \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right) |v_j| = \sum_j |v_j|, \tag{4}$$

also $|\lambda| \leqslant 1$.

(c) Wir haben

$$A^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{j1} \\ \cdots \\ \sum_{j=1}^n a_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist 1 ein Eigenwert von A^T und mit Aufgabe 15 auch einer von A.

(d) Sei λ ein komplexer Eigenwert von A vom Betrag $|\lambda| = 1$. Mit Aufgabe 15 gibt es dann einen komplexen Eigenvektor $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ von A^T zum Eigenwert λ. Sei k ein Index mit $|v_k| \geqslant |v_j|$ für alle j. Wir können annehmen, dass $v_k \in \mathbb{R}^{>0}$ ist.

Da $|\lambda| = 1$ ist, gilt

$$|v_k| = |(A^T v)_k| = \left|\sum_j a_{jk} v_j\right| \leqslant \sum_j a_{jk}|v_j| \leqslant |v_k| \sum_j a_{jk} = |v_k|.$$

Aus dem Sandwich-Prinzip (siehe Analysis) folgt $|v_j| = |v_k|$ für alle j. Da in der obigen Dreiecksungleichung Gleichheit herrscht, gilt zudem dass alle $a_{jk}v_j$ dasselbe komplexe Argument in $\mathbb{C}$ haben, also es für jedes j ein $t_j \in \mathbb{R}^{>0}$ gibt mit $a_{jk}v_j = t_j a_{kk} v_k$. Da $a_{kk}v_k$ und auch alle a_{jk} reell und positiv sind, folgt $v_j \in \mathbb{R}^{>0}$ für alle j. Mit $|v_j| = |v_k|$ für alle j gilt daher $v = c(1, \ldots, 1)^T$ für ein $c \in \mathbb{R}^{>0}$ und mit Aufgabe (b) somit $\lambda = 1$. Wir schliessen, dass $\lambda = 1$ der einzige komplexe Eigenwert von A^T vom Absolutbetrag 1 ist und geometrische Vielfachheit 1 hat. Mit Aufgabe 15 gilt dasselbe für A.

(e) Wenn A diagonalisierbar ist, stimmen die arithmetischen und geometrischen Vielfachheiten überein und die Aussage folgt aus Teil (d).

(f) Siehe Teil (d).

(g) Sei $v := (v_1, \ldots, v_n)^T$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 1$. Dann gilt in (4) Gleichheit, was impliziert, dass auch (3) für alle i eine Gleichung ist. Ausserdem ist mindestens ein $v_k \neq 0$; also ist der Vektor $w := (|v_1|, \ldots, |v_n|)^T$ ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Nun sind alle $|v_k| \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ und $a := |v_1| + \ldots + |a_n| > 0$; also ist $\frac{1}{a} \cdot w$ ein stochastischer Eigenvektor zum Eigenwert 1. Die Eindeutigkeit folgt aus Aufgabe (d).

(h) Angenommen A ist diagonalisierbar. Sei U eine invertierbare Matrix U und D eine Diagonalmatrix mit $A = UDU^{-1}$ und $D_{11} = 1$. Durch die bisherigen Aufgabenteile wissen wir, dass $|D_{ii}| < 1$ ist für $i \geqslant 2$. Es folgt, dass der Limes

$$B := \lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} UDU^{-1} = U(\lim_{n\to\infty} D^n)U^{-1} = UD'U^{-1} \tag{5}$$

existiert, wobei $D' = (\delta_{i1}\delta_{j1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ die Diagonalmatrix mit Eintrag 1 an $(1,1)$-ter Stelle und sonst verschwindenden Einträgen ist (Um den Limes in (5) ins Innere zu ziehen, nutzen wir, dass Multiplikation mit einer Matrix eine stetige Abbildung ist).

Sei v ein beliebiger stochastischer Vektor. Dann ist $A^m v$ für jedes m ein stochastischer Vektor und somit auch Bv. Wegen

$$ABv = A \lim_{m\to\infty} A^m v = \lim_{m\to\infty} A \cdot A^m v = \lim_{m\to\infty} A^m v = Bv$$

ist Bv ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Aus Teil (g) folgt somit

$$\lim_{m\to\infty} A^m v = Bv = v_1\,.$$

*28. Gegeben sei ein diskretes dynamisches System mit n Zuständen, bei dem in jedem Zeitschritt der Zustand j mit der Wahrscheinlichkeit a_{ij} in den Zustand i übergeht, und die Übergänge zu verschiedenen Zeiten alle voneinander unabhängig sind. Dann ist $A = (a_{ij})_{i,j}$ eine Markovmatrix, das heisst, eine quadratische Matrix mit reellen Koeffizenten $\geqslant 0$ und jeder Spaltensumme gleich 1. Zur Zeit 0 habe der Zustand i die Wahrscheilnichkeit v_i. Mit dem Spaltenvektor $v := (v_i)$ sind dann die Wahrscheinlichkeiten der Zustände zur Zeit m die Einträge des Vektors $A^m v$. Gefragt ist, wie sich das System für $m \to \infty$ entwickelt.

Im Jahr 2014 waren an der ETH Zürich 18178, an der Universität Zürich 25715 und an der EPFL Lausanne 9666 Studenten eingeschrieben. Wir nehmen hypothetisch das folgende an: Während jedes Jahres wechseln 1/8 der ETH Studenten zur UZH und 1/8 zur EPFL. Von der UZH wechseln jedes Jahr 1/3 der Studenten zur ETH und 1/3 zur EPFL. Von der EPFL wechseln jedes Jahr 1/4 der Studenten zur ETH und 1/8 zur UZH. Alle übrigen Studenten bleiben an ihrer Heimatuniversität. Wir nehmen weiter an, dass die Gesamtanzahl Studierender gleichbleibt und die Studentenschaft sich in gleichem Masse erneuert (gleiche Anzahl Aus- und Eintritte).

(a) Bestimme die Markov-Übergangsmatrix zu diesem System.

(b) Bestimme die Studentenanteile und die Zahl der Studenten der drei Universitäten im Jahr 2114.

(c) Schätze die Anteile nach Ablauf des Jahrs 3014 möglichst genau, wenn die Anteile im Jahr 2014 unbekannt sind.

Lösung: (a) Wir identifizieren in einem Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ den Eintrag x_1 mit den Studenten der ETH, den Eintrag x_2 mit denen der UZH und x_3 mit denen der EPFL. Die Markov-Übergangsmatrix ist dann gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{3} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

(b) Der Anfangszustand im Jahr 2014 entspricht dem Vektor

$$v_0 := \begin{pmatrix} 18178 \\ 25715 \\ 9666 \end{pmatrix}.$$

Durch Normalisierung erhalten wir den Vektor der Studentenanteile

$$w_0 := \frac{1}{18178 + 25715 + 9666} \begin{pmatrix} 18178 \\ 25715 \\ 9666 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18178}{53559} \\ \frac{25715}{53559} \\ \frac{1074}{5951} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.48 \\ 0.18 \end{pmatrix}.$$

Um den Zustand nach 100 Jahren zu berechnen versuchen wir die Matrix A zu diagonalisieren: Das charakteristische Polynom von A ist

$$\mathrm{char}_A(X) = X^3 - \frac{41}{24}X^2 + \frac{13}{16}X - \frac{5}{48}.$$

Durch Probieren finden wir den Eigenwert 1. Nach Polynomdivision durch $X-1$ und durch verwenden der Mitternachtsformel erhalten wir

$$\mathrm{char}_A(X) = (X-1)\cdot(X-\frac{1}{2})\cdot(X-\frac{5}{24})$$

Da $\mathrm{char}_A(X)$ drei verschiedene Eigenwerte mit arithmetischer Multiplizitität 1 hat, ist A diagonalisierbar. Wir finden die Eigenräume

$$E_{A,1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{A,\frac{1}{2}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad E_{A,\frac{5}{24}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \right\rangle,$$

und bilden die zugehörige Basiswechselmatrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{10} & 0 & -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{5} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

mit Inverser

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{19} & \frac{10}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{6}{133} & -\frac{32}{133} & \frac{6}{133} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{24} \end{pmatrix} \cdot M^{-1}.$$

und wir finden

$$\begin{aligned} A^{100} &= M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{24} \end{pmatrix}^{100} \cdot M^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7}\,a + \frac{6}{133}\,b + \frac{10}{19} & -\frac{2}{7}\,a - \frac{32}{133}\,b + \frac{10}{19} & -\frac{4}{7}\,a + \frac{6}{133}\,b + \frac{10}{19} \\ -\frac{3}{19}\,b + \frac{3}{19} & \frac{16}{19}\,b + \frac{3}{19} & -\frac{3}{19}\,b + \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{7}\,a + \frac{15}{133}\,b + \frac{6}{19} & \frac{2}{7}\,a - \frac{80}{133}\,b + \frac{6}{19} & \frac{4}{7}\,a + \frac{15}{133}\,b + \frac{6}{19} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $a := 1/2^{100}$ und $b := (5/24)^{100}$ ist. Damit erhalten wir die Studentenzahlen im Jahr 2114:

$$A^{100}v_0 = \frac{1}{19}\cdot\begin{pmatrix} -96520\,a - 93688\,b + 535590 \\ 327908\,b + 160677 \\ 96520\,a - 234220\,b + 321354 \end{pmatrix},$$

woraus sich die Studentenanteile ermitteln lassen.

Die Konstanten a und b haben die Grössenordnung $a \approx 10^{-31}$ und $b \approx 10^{-69}$. Wenn wir nur an näherungsweisen Lösungen interessiert sind, ergibt sich

$$A^{100} \approx B := M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10}{19} & \frac{10}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{3}{19} & \frac{3}{19} & \frac{3}{19} \\ \frac{6}{19} & \frac{6}{19} & \frac{6}{19} \end{pmatrix}$$

und damit die Näherung

$$A^{100} v_0 \approx B v_0 = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 535590 \\ 160677 \\ 321354 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten näherungsweise also die folgende Studentenverteilung im Jahr 2114:

$$A^{100} w_0 \approx \frac{1}{19 \cdot 53559} \begin{pmatrix} 535590 \\ 160677 \\ 321354 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{19} \\ \frac{3}{19} \\ \frac{6}{19} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.53 \\ 0.16 \\ 0.31 \end{pmatrix}.$$

Im Teil (c) werden wir eine genauere Fehlerabschätzung betrachten.

(c) Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ und $x_i \geqslant 0$ für $i = 1, 2, 3$ eine beliebige Studentenverteilung im Jahr 2014. Mit der Matrix B wie in Teil (b) gilt für die Studentenverteilung nach N Jahren

$$A^N x = (A^N - B)x + Bx.$$

Jede Spaltensumme der Matrix B ist gleich 1. Da $\operatorname{Rang}(B) = 1$ ist und $(1, 3/10, 3/5)^T$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, ist $Bx = \lambda(1, 3/10, 3/5)^T$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Aus $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, folgt $\lambda = 10/16$ und damit

$$Bv = \begin{pmatrix} \frac{10}{19} \\ \frac{3}{19} \\ \frac{6}{19} \end{pmatrix}.$$

Wir schätzen den Restterm

$$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := (A^N - B)x$$

ab. Sei $a := (1/2)^N$ und $b := (5/24)^N$. Dann sind die Koeffizienten der Matrix $A^N - B$ linear in a und b ohne konstantem Term. Da $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ für $i = 1, 2, 3$ ist, also insbesondere die x_i beschränkt sind, erhält man eine Abschätzung der y_i von der Form

$$|y_i| \leqslant c_1 a + c_2 b$$

für gewisse Konstanten $c_1, c_2 \geqslant 0$, welche man z.B. als $c_1 = c_2 = 100$ wählen kann.

Nach 1000 Jahren erhalten wir also die Studentenverteilung $\begin{pmatrix} \frac{10}{19} \\ \frac{3}{19} \\ \frac{6}{19} \end{pmatrix}$ mit einer Abweichung von

$$|y_i| \leqslant \; 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{1000} + 100 \left(\frac{5}{24}\right)^{1000} \leqslant 10^{-299}.$$

*29. (a) Beweise das Bruhat-Lemma: Für je zwei Fahnen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ eines endlichdimensionalen Vektorraums V existiert eine Basis von V, so dass jeder Teilraum in $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ von einer Teilmenge der Basis erzeugt wird.

(b) Folgere daraus die Bruhat-Zerlegung: Jede invertierbare quadratische Matrix A lässt sich schreiben als $A = BWB'$ mit oberen Dreiecksmatrizen B und B' sowie einer Permutationsmatrix W.

Lösung:

(a) Wir verwenden Induktion über die Dimension von V. Im Fall $\dim(V) = 0$ gilt die Aussage. Sei also $n := \dim(V) > 0$ und angenommen die Aussage gilt für alle Vektorräume der Dimension $n - 1$.

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ zwei beliebige Fahnen von V. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ vollständig, also von der Form

$$\mathcal{F} = \big\{U_i \mid i = 0, \ldots, n\big\} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}' = \big\{V_i \mid i = 0, \ldots, n\big\}$$

mit Unterräumen $U_i, V_i \subset V$ der Dimension i sind. Die Induktionsvoraussetzung auf die Fahnen

$$\big\{U_i \mid i = 0, \ldots, n-1\big\} \quad \text{und} \quad \big\{V_i \cap U_{n-1} \mid i = 0, \ldots, n\big\},$$

von U_{n-1} angewendet liefert uns eine Basis $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ von U_{n-1}, so dass alle diese Unterräume von U_{n-1} von einer Teilmenge der Basis erzeugt werden. Betrachte die Kette von Unterräumen

$$U_{n-1} = U_{n-1} + V_0 \;\subset\; U_{n-1} + V_1 \;\subset\; \ldots \;\subset\; U_{n-1} + V_n = V\,.$$

Wegen $\dim(U_{n-1}) = \dim(V) - 1$ existiert ein eindeutiger Index $1 \leqslant k \leqslant n$ mit

$$U_{n-1} + V_{k-1} = U_{n-1} \quad \text{und} \quad U_{n-1} + V_k = V\,.$$

Wähle einen beliebigen Vektor $v_n \in V_k \setminus (V_k \cap U_{n-1})$. Wegen $v_n \notin U_{n-1}$ bilden die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Wir behaupten, dass diese Basis die gewünschte Eigenschaft erfüllt.

Nach Konstruktion ist bereits jedes U_i für $0 \leqslant i \leqslant n-1$ von einer Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_n\}$ erzeugt. Dasselbe gilt auch für $U_n = V$, da wir eine Basis von V haben. Sodann gilt für jedes $0 \leqslant i < k$ die Inklusion $V_i \subset U_{n-1}$, also $V_i = V_i \cap U_{n-1}$, und nach Konstruktion ist dieser Unterraum von einer Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_n\}$ erzeugt.

Betrachte schliesslich ein $i \geqslant k$. Dann gilt $U_{n-1} + V_i = V$ und folglich

$$\dim V_i \cap U_{n-1} = \dim V_i + \dim U_{n-1} - \dim(U_{n-1} + V_i) = i - 1.$$

Da $v_n \in V_i \setminus (V_i \cap U_{n-1})$ ist, folgt aus Dimensionsgründen

$$V_i = (V_i \cap U_{n-1}) \oplus \langle v_n \rangle .$$

Nach Konstruktion ist der Unterraum $V_i \cap U_{n-1}$ von einer Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ erzeugt. Es folgt, dass V_i von einer Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_n\}$ erzeugt ist.

Insgesamt ist also jeder Teilraum in $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ von einer Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_n\}$ erzeugt; die Aussage der Aufgabe gilt also auch für V.

(b) Bezeichne mit $e_1, \ldots, e_n$ die Vektoren der Standardbasis von K^n und betrachte die vollständigen Fahnen

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \big\{\langle e_1, \ldots, e_k \rangle \mid k = 0, \ldots, n\big\} \\ \mathcal{F}' &:= \big\{\langle Ae_1, \ldots, Ae_k \rangle \mid k = 0, \ldots, n\big\} . \end{aligned}$$

Nach (a) existiert eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von K^n, sodass jeder Unterraum von $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ durch eine Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_n\}$ erzeugt ist. Nach möglichem Umordnen der Vektoren v_i gilt für alle k

$$\langle e_1, \ldots, e_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle .$$

Die Matrix $B = (v_1, \ldots, v_n)$ ist also eine invertierbare obere Dreiecksmatrix. Da A invertierbar ist, hat $\langle Ae_1, \ldots, Ae_k \rangle$ Dimension k für jedes k. Es existiert also eine (eindeutige) Permutation $\sigma \in S_n$ mit:

$$\forall k \ : \ \langle Ae_1, \ldots, Ae_k \rangle = \langle v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)} \rangle.$$

Somit ist Ae_k eine Linearkombination der Vektoren $v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}$ für alle k und folglich existiert eine obere Dreiecksmatrix B' mit

$$A = \big(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\big) \cdot B'$$

Für die Permutationsmatrix $W := (\delta_{i,\sigma^{-1}(i)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ gilt

$$\big(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}\big) = (v_1, \ldots, v_n) \cdot W = B \cdot W,$$

also wie gewünscht $A = B \cdot W \cdot B'$.