Serie 2

Relationen, Ringe, Körper

1. Bestimmen Sie für jede der folgenden Relationen auf $\mathbb{R}^2$, ob sie eine Teilordnung bzw. eine Totalordnung ist.

   (a) $(a,b) \preceq (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; a \leqslant c$.

   (b) $(a,b) \preceq (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; a \leqslant c$ und $b \geqslant d$.

*2. Zwei (teilweise oder total) geordnete Mengen $(X, \leqslant)$ und $(X', \leqslant')$ heißen *isomorph* genau dann, wenn es eine Bijektion $f\colon X \to X'$ gibt, so dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$x \leqslant y \iff f(x) \leqslant' f(y).$$

   (a) Zeige: Wenn $(X, \leqslant)$ ein grösstes (bzw. kleinstes) Element besitzt, so tut es jede dazu isomorphe geordnete Menge ebenfalls.

   (b) Eine Ordnung heisst *dicht*, wenn für je zwei Elemente x und y mit $x < y$ ein z existiert mit $x < z < y$. Zeige: Ist eine Ordnung dicht, so gilt dasselbe für jede dazu isomorphe geordnete Menge.

   (c) Welche der Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^{\geqslant 0}$, $\mathbb{Z}^{\leqslant 0}$, $\mathbb{Q}$ mit der Einschränkung der üblichen Ordnungsrelation $\leqslant$ sind zueinander isomorph?

   (d) Konstruiere eine abzählbar unendliche Menge mit einer Totalordnung, die zu keiner der geordneten Mengen in (c) isomorph ist.

3. Betrachten Sie zwei beliebige Äquivalenzrelationen E_1 und E_2 auf einer Menge A. Beweisen Sie für jede der folgenden Aussagen, dass sie im Allgemeinen wahr ist, oder finden Sie ein Gegenbeispiel.

   (a) Die Relation $E_1 \cup E_2$ ist eine Äquivalenzrelation auf A.

   (b) Die Relation $E_1 \cap E_2$ ist eine Äquivalenzrelation auf A.

   (c) Die Relation $E_1 \times E_2$ ist eine Äquivalenzrelation auf $A \times A$.

4. Betrachte eine ganze Zahl $n \geqslant 1$. Zeige, dass in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ das Kommutativitätsgesetz der Multiplikation und das Distributivitätsgesetz gilt.

5. Sei X eine Menge und R die Menge aller Abbildungen $X \to \mathbb{R}$. Für zwei Elemente $f, g \in R$ definieren wir $f + g, f \cdot g \in R$ durch die Vorschrift $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ beziehungsweise $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ für alle $x \in X$. Zeige, dass R mit diesen beiden Operationen und einem geeigneten Null- bzw. Eins-Element einen kommutativen unitären Ring bildet. Für welche X ist dieser Ring ein Körper?

6. Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Seine Elemente sind $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$, wobei jeweils $\overline{n}$ die Restklasse von n modulo $5\mathbb{Z}$ bedeutet. Berechne ...

   (a) ... alle Lösungen (x, y) der Gleichung $x + y = \overline{0}$.

   (b) ... den Wert von $\frac{\overline{3}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}}$.

   (c) ... den Wert von $\overline{4}^{2021}$,

*7. Sei k ein endlicher Körper und S die Summe aller Elemente von k. Zeige, dass $S = 0$ ist genau dann, wenn k mehr als 2 Elemente besitzt.

   (*Hinweis:* Beweisen Sie zunächst, dass für alle $b \in k^{\times}$ die Gleichung $bS = S$ gilt.)