D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2021
Prof. Richard Pink

Serie 3

Körper und Vollständige Induktion

1. Zeigen Sie, dass die Menge
$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$
mit der Addition und Multiplikation von reellen Zahlen sowie den Konstanten 0 und 1 ein Körper ist.

2. Seien a und b von Null verschiedene Elemente eines Körpers K. Zeige
   (a) Das inverse Element der Multiplikation a^{-1} ist eindeutig bestimmt.
   (b) Es gilt $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
   (c) Es gilt $(a/b)^{-1} = b/a$.

3. Sei $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ eine nicht-negative ganze Zahl. Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in eine pünktchenfreie Schreibweise. Achten Sie darauf, dass die Aussage auch für $n = 0$ einen Sinn ergibt.
   (a)
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}\,.$$
   (b) Für alle $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ gilt
$$(a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) \;=\; a_0 - a_n.$$
   (c) Gegeben sind Elemente $a_{ij} \in K$ für $i, j = 1, \ldots, n$, sodass gilt
$$(a_{11} + \ldots + a_{1n}) + (a_{21} + \ldots + a_{2n}) + \ldots + (a_{n1} + \ldots + a_{nn}) \;=\; 0\,.$$
   (d) Es existieren Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in $\mathbb{R}$, sodass für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt:
$$\frac{a_1^1}{1!} + \frac{a_2^2}{2!} + \ldots + \frac{a_n^n}{n!} \;=\; n\,.$$
   (e) Für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ definieren wir
$$a_n := \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1}}}},$$
   mit insgesamt $n + 1$ Bruchstrichen.

4. Beweisen Sie, dass für alle $x, y \in K$ and alle $m, n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt:

   (a) $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$

   (b) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.

5. Die folgende Behauptung ist falsch. Was stimmt nicht mit dem „Beweis"?

   Behauptung. Seien $n, m, k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ und $\max\{n, m\} = k$; dann gilt $n = m = k$.

   „Beweis". Wir führen Induktion nach k.
   Induktionsverankerung $k = 0$: Aus $\max\{n, m\} = 0$ folgt $n = m = 0 = k$.
   Induktionsschritt: Aus $\max\{n, m\} = k$ folgt $\max\{n-1, m-1\} = k-1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $n - 1 = m - 1 = k - 1$ und damit auch $n = m = k$. □

6. Betrachte eine beliebige ganze Zahl $n \geqslant 0$ sowie beliebige Elemente $a, a_i, b_i \in K$ für $0 \leqslant i \leqslant n$. Beweisen Sie durch Induktion die folgenden Aussagen.

   (a)
   $$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)\,.$$

   (b)
   $$a \cdot \sum_{i=0}^{n} b_i \;=\; \sum_{i=0}^{n} ab_i\,.$$

*7. Die *Fibonacci-Zahlen* F_n sind für alle ganzen Zahlen $n \geqslant 0$ definiert durch

$$F_n \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0, \\ 1 & \text{für } n = 1, \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für alle } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Zeige mit $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\psi := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ die geschlossene Formel

$$F_n \;=\; \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} \;=\; \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$