D-MATH
Prof. Richard Pink

Lineare Algebra I

HS 2021

Serie 4

Summen, Produkte und Matrizen

1. Beweisen Sie:

   (a) Für jede ganze Zahl $n \geqslant 0$ gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

   (b) Für alle ganzen Zahlen $n, m \geqslant 0$ gilt $\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$.

   *(c) Für alle ganzen Zahlen $n, m, r \geqslant 0$ mit $r \leqslant m+n$ gilt $\sum \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$, wobei sich die Summe über alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leqslant k \leqslant m$ und $0 \leqslant r-k \leqslant n$ erstreckt.

2. Sei $m > 0$ eine ganze Zahl. Vereinfachen Sie das folgende Teleskopprodukt:

$$\prod_{n=2}^{m} (1 - \tfrac{1}{n^2}).$$

3. Beweisen Sie mittels Induktion:

   (a) Im Körper der rationalen Zahlen gilt für alle $n \geqslant 1$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{n^n}{n!}\,.$$

   (b) Für alle $n \geqslant 2$ und für beliebige Elemente $x \neq y$ eines Körpers gilt

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\,.$$

4. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Variablen x_1, x_2, x_3 in $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & - & 7x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

5. Beweisen Sie die Linksdistributivität der Matrixmultiplikation, das heisst: Zeigen Sie, dass für alle Matrizen A, B, C geeigneter Grösse über einem Körper K gilt

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

6. Berechnen Sie das folgende Produkt von Matrizen:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\a&1&0&0&0\\b&0&1&0&0\\c&0&0&1&0\\d&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&e&1&0&0\\0&f&0&1&0\\0&g&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&h&1&0\\0&0&i&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&j&1\end{pmatrix}$$

Wie sieht das Produkt in der umgekehrten Reihenfolge aus?

7. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Falls $a \neq c$ ist, so gilt für jedes $m \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix}a^m & b\,\frac{a^m-c^m}{a-c}\\ 0 & c^m\end{pmatrix}\ .$$

Leiten Sie eine ähnliche Formel für den Fall $a = c$ her.