Serie 5

Matrizen

1. Eine quadratische Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn ihre Transponierte A^T invertierbar ist, und dann ist $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, für welche Werte des Parameters α die folgende Matrix über $\mathbb{Q}$ invertierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2\alpha \\ -6 & 2 & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

3. Finden Sie eine 2×3-Matrix A und eine 3×2-Matrix B über $\mathbb{Q}$, so dass $A \cdot B$ eine Einheitsmatrix, aber $B \cdot A$ keine Einheitsmatrix ist.

4. Sei A eine der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $Ax = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

5. Seien A eine $m \times m$-Matrix und B eine $m \times n$-Matrix, und sei (A, B) die durch Zusammensetzen entstehende $m \times (m + n)$-Matrix. Sei C eine $m \times n$-Matrix, so dass (I_m, C) durch eine Folge elementarer Zeilenoperationen aus (A, B) entsteht. Zeigen Sie, dass dann A invertierbar und C die eindeutige Lösung der Gleichung $AC = B$ ist, das heisst

$$C \;=\; A^{-1}B.$$

6. Wir fixieren $n > \ell > 0$ und schreiben alle $n \times n$-Matrizen in Blockform

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

   wobei A_{11} eine $\ell \times \ell$-Matrix und A_{12}, A_{21}, A_{22} jeweils eine Matrix in passender Grösse ist (nämlich welcher?).

(a) Zeige, dass für beliebige solche Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} .$$

(b) Sei A eine $n \times n$-Matrix *in oberer Blockdreiecksform* bezüglich ℓ, das heisst, mit A_{21} gleich der Nullmatrix. Zeige, dass A invertierbar ist genau dann, wenn A_{11} und A_{22} invertierbar sind, und dann ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie als Anwendung die inversen Matrizen von

$$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

*7. Beweisen Sie den

Satz. *(Bruhat-Zerlegung)* Für jede invertierbare Matrix A existieren eine Permutationsmatrix P und invertierbare obere Dreiecksmatrizen B und B', so dass gilt

$$A = BPB'.$$

Hinweis: Wähle eine invertierbare obere Dreiecksmatrix U, so dass die Summe der Anzahlen der führenden Nullen in allen Zeilen der Matrix UA maximal ist. Sodann finde eine Permutationsmatrix Q, so dass QUA eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist.