Serie 6

Inverse Matrizen & Vektorräume

1. Invertieren Sie die folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

2. Berechnen Sie die Lösung $x \in \mathbb{Q}^3$ der Gleichung $Ax = b_i$ für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

   und jeden der folgenden Vektoren in $\mathbb{Q}^3$:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad b_4 := \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_5 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*3. Sei X eine Menge und P die Menge aller Teilmengen von X. Für alle A, $B \in P$ und $\lambda \in \mathbb{F}_2$ definiere

$$\begin{aligned} A + B &:= (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B), \\ \lambda \cdot A &:= \begin{cases} \varnothing & \text{für } \lambda = 0, \\ A & \text{für } \lambda = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

   Zeige, dass $(P, +, \cdot, \varnothing)$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

4. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^4$ sind reelle Unterräume?

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{ (0, x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R} \} \\ V_2 &:= \{ (x^4, x^3, x^2, x) \mid x \in \mathbb{R} \} \\ V_3 &:= \{ (x, x+y, x-y, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \\ V_4 &:= \{ (x^4 - y^4, 0, 0, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

5. Für einen Körper K und ein $\alpha \in K$ definieren wir

$$U_\alpha := \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = \alpha\}.$$

Zeige, dass U_α genau dann ein Untervektorraum von K^3 ist, wenn $\alpha = 0$ ist.

*6. Sei V ein K-Vektorraum und seien V_1, V_2, V_3 Untervektorräume, von denen keiner in einem der anderen enthalten ist. Entscheide, mit Beweis, ob die Vereinigung $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ immer, oder manchmal, oder nie ein Unterraum ist.

7. Seien n und m natürliche Zahlen und A eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Zeige, dass Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in K^n$ linear unabhängig sind genau dann, wenn $Av_1, \ldots, Av_m$ linear unabhängig sind.

8. Prüfe, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Löse ein geeignetes lineares Gleichungssystem.