D-MATH Lineare Algebra I HS 2021
Prof. Richard Pink

Serie 7

Lineare Unabhängigkeit, Basis

1. Sei $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{F}_2$ und sei
$$S := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \subset K^5.$$
Finde ein minimales Erzeugendensystem $S' \subset S$ von $\langle S \rangle$.

2. Im $\mathbb{R}^5$ seien die Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\-3\\3\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\\-3\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}2\\10\\14\\10\\10\end{pmatrix}$$
und
$$w_1 = \begin{pmatrix}1\\6\\6\\8\\6\end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\3\end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix}2\\4\\2\\2\\-4\end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\\3\\-2\end{pmatrix}$$
gegeben. Wähle aus v_1, v_2, v_3, v_4 bzw. w_1, w_2, w_3, w_4 Vektoren aus, die eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ bzw. $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ bilden.

3. Gegeben seien die Unterräume
$$V := \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U := \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$
von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Durchschnitts $V \cap U$.

4. Zeige, dass die Funktionen
$$\varphi_n : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n+x}$$
für $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Verwende, dass ein von Null verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat.

5. Zeige: Für jedes Erzeugendensystem E eines Vektorraums V und jede linear unabhängige Teilmenge L von V gilt

$$|L| \leqslant |E|.$$

6. Sind $+$ und $\cap$ von Unterräumen zueinander distributiv, das heisst, gelten für alle Unterräume eines beliebigen Vektorraums die folgenden Gleichungen?

$$\begin{aligned} U \cap (V_1 + V_2) &= (U \cap V_1) + (U \cap V_2) \\ U + (V_1 \cap V_2) &= (U + V_1) \cap (U + V_2) \end{aligned}$$

   Wenn nicht, gilt zumindest eine Inklusion?

7. Betrachte die folgenden Unterräume von K^n:

$$\begin{aligned} U &:= \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \mid \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}, \\ D &:= \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in K^n \mid \alpha \in K\}. \end{aligned}$$

   Bestimme eine Basis und die Dimension der Unterräume U, D, $U \cap D$ und $U + D$.