Serie 8

Direkte Summe, Komplemente & Lineare Abbildungen

1. Sei V der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge der *geraden Funktionen*
$$V_1 := \{f \in V \mid f(x) = f(-x)\}$$
bzw. der *ungeraden Funktionen*
$$V_2 := \{f \in V \mid f(x) = -f(-x)\}$$
ein Untervektorraum von V ist. Zeige ausserdem $V = V_1 \oplus V_2$.
(Hinweis: Betrachte zu $f \in V$ die Funktion $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.)

2. Betrachte den Unterraum
$$V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
von $\mathbb{R}^4$. Finde eine Basis eines Komplements von V in $\mathbb{R}^4$.

3. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 0)$
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x, 1)$
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$
   (e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität
   (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$
   (g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

4. Berechne eine Basis des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $\mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$, die durch Linksmultiplikation mit der folgenden Matrix definiert ist:
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Sei V ein Vektorraum. Ein Endomorphismus $P\colon V \to V$ mit der Eigenschaft $P^2 := P \circ P = P$ heisst *idempotent* oder eine *Projektion*. Zeige:

   (a) Für jede Projektion P gilt
   $$V = \operatorname{Kern}(P) \oplus \operatorname{Bild}(P).$$

   (b) Für beliebige Untervektorräume $W_1, W_2 \subset V$ mit $V = W_1 \oplus W_2$ existiert eine eindeutige Projektion $P\colon V \to V$ mit
   $$\operatorname{Kern}(P) = W_1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild}(P) = W_2\,.$$

6. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeige:

   (a) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild
   $$f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$
   ein Unterraum von V.

   (b) Es gilt
   $$\dim f^{-1}(W') = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim(\operatorname{Bild}(f) \cap W')\,.$$

7. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige:

   (a) Die Abbildung f ist injektiv genau dann, wenn eine lineare Abbildung $g\colon W \to V$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$ (Linksinverse).

   (b) Die Abbildung f ist surjektiv genau dann, wenn eine lineare Abbildung $g\colon W \to V$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$ (Rechtsinverse).